

O HOMOGENNÍCH FUNKCÍCH V TEORII POLE DRUHÉHO ŘÁDU

Ján BRAJERČÍK¹, Zbyněk URBAN²

¹Prešovská univerzita v Prešově, ²VŠB – Technická univerzita Ostrava

1 ÚVOD

V tomto článku studujeme vlastnosti funkcí, které jsou invariantní vzhledem k difeomorfismům jejich definičních oborů a definují variační funkcionály nezávislé na parametrizaci. Obdržíme tak koncept homogenní funkce vyššího řádu, charakterizovaný známými Zermelovými podmínkami (viz např. McKiernan [7], Kawaguchi [3], Matsyuk [6], Crampin a Saunders [1]); fyzikální význam těchto podmínek viz např. Kondo [4]. K tomuto účelu aplikujeme Ehresmannovu teorii jetů, diferenciálních grup a jetových prodloužení křivek a tečných prostorů (viz Grigore a Krupka [2], Krupka a Janyška [5]), a zavádíme koncept pozitivně homogenní funkce závislé na zobrazeních a jejich parciálních derivacích prvního a druhého řádu.

Hlavní výsledek pak spočívá v charakterizaci Lagrangiánů druhého řádu, jejichž odpovídající extremály jsou množinová řešení a ve studiu variačních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Ukážeme, že variační systémy s pozitivně homogenními Lagrangiány jsou definovány pozitivně homogenními funkcemi a naopak. Variační základy Finslerovy geometrie, kde fundamentální funkce splňují podmínky pozitivní homogenity, lze postavit na základě předkládané teorie.

Tento příspěvek rozšiřuje práci Urban a Krupka [8] pro případ zobrazení mezi Eukleidovskými prostory (teorie pole). Důkazy tvrzení jsou vzhledem k charakteru práce vynechány.

2 REGULÁRNÍ RYCHLOSTI NAD EUKLEIDOVSKÝMI PROSTORY

V této části uvažujeme zobrazení $\gamma : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, mezi Eukleidovskými prostory, která definují prostor s akcí konečně rozměrné Lieovy grupy, reprezentující reparametrizace. Kanonické souřadnice na $\mathbf{R}^{m+n}$ označujeme y^K , $K = 1, 2, \dots, m+n$.

n -rychlostí řádu 2 v bodě $y \in \mathbf{R}^{m+n}$ rozumíme 2-jet $J_0^2\gamma$ s počátkem $0 \in \mathbf{R}^n$ a cílem $\gamma(0) = y$. Je-li γ reprezentantem $J_0^2\gamma$, pak třídu ekvivalence $J_0^2\gamma$ lze ztotožnit s uspořádaným souborem čísel $(y^K(J_0^2\gamma), y_j^K(J_0^2\gamma), y_{jk}^K(J_0^2\gamma))$, kde $1 \leq j \leq k \leq n$, definovaných pomocí derivací zobrazení $(x^i) \rightarrow y^K\gamma(x^i)$ v počátku $0 \in \mathbf{R}^n$, tj.

$$\begin{aligned} y^K(J_0^2\gamma) &= y^K(\gamma(0)), & y_j^K(J_0^2\gamma) &= D_j(y^K\gamma)(0), \\ y_{jk}^K(J_0^2\gamma) &= D_k D_j(y^K\gamma)(0). \end{aligned} \tag{1}$$

Množina n -rychlostí řádu 2 v bodě $y \in \mathbf{R}^{m+n}$ tvoří prostor jetů $J_{(0,y)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{m+n})$, a označujeme

$$T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} = \bigcup_{y \in \mathbf{R}^{m+n}} J_{(0,y)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{m+n}).$$

Kanonická jetová projekce $\tau^{2,0} : T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$, je surjektivní zobrazení dané vztahem $\tau^{2,0}(J_0^2 \gamma) = \gamma(0)$. Uvažujme množinu $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ rychlostí řádu 2 se standardními geometrickými strukturami. Funkce (y^K, y_j^K, y_{jk}^K) definované vztahem (1) jsou (globální) *kanonické souřadnice* na $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$. Kanonická trivializace prostoru $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ je zobrazení

$$T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \ni J_0^2 \gamma \mapsto (\gamma(0), J_0^2 \text{tr}_{\psi\gamma(0)} \psi \gamma) \in \mathbf{R}^{m+n} \times J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{m+n}). \quad (2)$$

Zobrazení (2) zvláště ukazuje, že $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ je triviální vektorový fibrovaný prostor s bází $\mathbf{R}^{m+n}$, projekcí $\tau^{2,0} : T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$, a typovou vrstvou $J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^{m+n})$. Prostor $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ nazýváme *varieta n -rychlostí řádu 2 nad $\mathbf{R}^{m+n}$* .

Připomeňme nyní koncept diferenciální grupy prostoru $\mathbf{R}^n$. Uvažujme varietu $J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ 2-jetů s počátkem a cílem v bodě $0 \in \mathbf{R}^n$. Necht α^i značí i -tou složku zobrazení $\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, kde $\alpha(0) = 0$. Pro každý prvek $J_0^2 \alpha \in J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ pak definujeme reálné funkce a_j^i, a_{jk}^i na $J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ vztahy

$$a_j^i(J_0^2 \alpha) = D_j \alpha^i(0), \quad a_{jk}^i(J_0^2 \alpha) = D_k D_j \alpha^i(0), \quad (3)$$

kde $1 \leq j \leq k \leq n$. Tyto funkce jsou tzv. *kanonické souřadnice*, a tvoří globální souřadnicový systém na $J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. *Invertibilní* jety jsou podmnožinou v $J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, tvořenou jety $J_0^2 \alpha$ reprezentované *difeomorfismy* α , kterou označujeme

$$L_n^2 = \text{Imm } J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) = \{J_0^2 \alpha \in J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \mid \det(a_j^i(J_0^2 \alpha)) \neq 0\}.$$

Zřejmě L_n^2 je hustá a otevřená podmnožina v $J_{(0,0)}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Zúžením funkcí a_j^i, a_{jk}^i (3) obdržíme kanonické globální souřadnice na L_n^2 . Zobrazení

$$L_n^2 \times L_n^2 \ni (J_0^2 \alpha, J_0^2 \beta) \mapsto J_0^2 \alpha \circ J_0^2 \beta = J_0^2(\alpha \circ \beta) \in L_n^2, \quad (4)$$

definované skládáním jetů, definuje grupové násobení na L_n^2 . Množina L_n^2 s operací (4) má strukturu Lieovy grupy a nazývá se *diferenciální grupa druhého řádu prostoru $\mathbf{R}^n$* .

Varieta $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ je opatřena pravou akci diferenciální grupy L_n^2 pomocí operace skládání jetů,

$$T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \times L_n^2 \ni (J_0^2 \gamma, J_0^2 \alpha) \mapsto J_0^2 \gamma \circ J_0^2 \alpha = J_0^2(\gamma \circ \alpha) \in T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}, \quad (5)$$

Abychom popsalí tuto akci v kanonických souřadnicích, označme

$$\bar{y}^K(J_0^2 \gamma) = y^K(J_0^2(\gamma \circ \alpha)), \quad \bar{y}_j^K(J_0^2 \gamma) = y_j^K(J_0^2(\gamma \circ \alpha)), \quad \bar{y}_{jk}^K(J_0^2 \gamma) = y_{jk}^K(J_0^2(\gamma \circ \alpha)).$$

Lemma 1 Akce (5) diferenciální grupy L_n^2 na $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ je dána rovnicemi

$$\bar{y}^K = y^K, \quad \bar{y}_j^K = y_p^K a_j^p, \quad \bar{y}_{jk}^K = y_{pq}^K a_j^p a_k^q + y_p^K a_{jk}^p. \quad (6)$$

Libovolné diferencovatelné zobrazení γ s hodnotami v $\mathbf{R}^{m+n}$, definované na otevřené podmnožině $U \subset \mathbf{R}^n$, generuje zobrazení

$$U \ni x \mapsto T_n^2 \gamma(x) = J_0^2(\gamma \circ \text{tr}_{-x}) \in T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}, \quad (7)$$

nazývané (druhé) *jetové prodloužení* zobrazení γ . Pro každý difeomorfismus $\mu : V \rightarrow U$ otevřených podmnožin $\mathbf{R}^n$, a každý bod $z \in V$, $J_0^2(\text{tr}_{\mu(z)} \circ \mu \circ \text{tr}_{-z})$ je prvkem diferenciální grupy L_n^2 . Položme

$$\mu_z = \text{tr}_{\mu(z)} \circ \mu \circ \text{tr}_{-z}, \quad \mu^{(2)}(z) = J_0^2 \mu_z. \quad (8)$$

Následující lema vyjadřuje reparametrizace definičního oboru zobrazení $T_n^2 \gamma$.

Lemma 2 Necht $\mu : V \rightarrow U$ je libovolný difeomorfismus otevřených podmnožin v $\mathbf{R}^n$. Jetové prodloužení $T_n^2 \gamma$ zobrazení $\gamma : U \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$ splňuje identitu

$$T^2(\gamma \circ \mu)(z) = T^2 \gamma(\mu(z)) \circ \mu^{(2)}(z). \quad (9)$$

V dalším se omezíme na zobrazení, která jsou *immerzemi* (tj. jejich tečná zobrazení jsou injektivní). $J_0^2 \gamma \in T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ se nazývá *regulární*, jestliže každý reprezentant jetu $J_0^2 \gamma$ je immerze v počátku $0 \in \mathbf{R}^n$. Množina $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ regulárních rychlostí tvoří otevřenou podmnožinu v $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$, a se strukturou otevřené podvariety se $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ nazývá *varieta regulárních n -rychlostí řádu 2 nad $\mathbf{R}^{m+n}$* . Zúžením kanonických souřadnic (y^K, y_j^K, y_{jk}^K) obdržíme kanonické souřadnicové systémy na $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$, indukované atlasem na $T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$.

Varieta regulárních rychlostí $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ je také opatřena jinou hladkou strukturou. Označme $(i) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ rostoucí n -podposloupnost posloupnosti $(1, 2, \dots, m+n)$ a (σ) necht označuje komplementární rostoucí podposloupnost. Z definice immerze vyplývá, že ke každé regulární rychlosti $J_0^2 \gamma$ existuje n -podposloupnost (i) posloupnosti $(1, 2, \dots, m+n)$ taková, že

$$\det y_j^i(J_0^1 \zeta) = \det (D_j(y^i \zeta)(0)) \neq 0,$$

kde $i \in (i)$, $1 \leq j \leq n$. Položme

$$W_n^{2(i)} = \{J_0^2 \gamma \in \text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \mid \det (D_j(y^i \zeta)(0)) \neq 0\}, \quad (10)$$

pro každou n -podposloupnost (i) posloupnosti $(1, 2, \dots, m+n)$. Pak zřejmě, $W_n^{2(i)}$ je otevřenou podmnožinou v $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ a $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ je pokryta množinami $W_n^{2(i)}$,

přičemž (i) probíhá všechny n -podposloupnosti v $(1, 2, \dots, m+n)$. Zavedeme adaptované souřadnice $\chi_n^{2(i)} = (w^i, w^\sigma, w_j^i, w_i^\sigma, w_{jk}^i, w_{ip}^\sigma)$ na $W_n^{2(i)} \subset \text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$, které jsou odvozeny z kanonických souřadnic a jejich derivací následovně:

$$\begin{aligned} y^i &= w^i, & y^\sigma &= w^\sigma, & y_j^i &= w_j^i, & y_j^\sigma &= y_j^i w_i^\sigma, \\ y_{jk}^i &= w_{jk}^i, & y_{jk}^\sigma &= y_{jk}^i w_i^\sigma + y_j^i y_k^p w_{ip}^\sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

Snadno vidíme, že souřadnice $w^i, w^\sigma, w_j^i, w_i^\sigma, w_{jk}^i, w_{ip}^\sigma$ jsou L_n^2 -invariantní. $(W_n^{2(i)}, \chi_n^{2(i)})$ se nazývá (i) -podřízený souřadnicový systém, adaptovaný ke kanonické grupové akci L_n^2 na $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$.

3 HOMOGENNÍ FUNKCE A EULERŮV–ZERMELŮV TEORÉM

Uvažujme varietu regulárních rychlostí $\text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ s kanonickými souřadnicemi y^K, y_j^K, y_{jk}^K a diferenciální grupu L_n^2 s kanonickými souřadnicemi a_j^i, a_{jk}^i .

Funkce $F : \text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}$ se nazývá *pozitivně homogenní* v proměnných y^K, y_j^K, y_{jk}^K (stupně 1), nebo pouze *pozitivně homogenní*, je-li

$$F(J_0^2 \gamma \circ J_0^2 \alpha) = \det D\alpha \cdot F(J_0^2 \gamma) \quad (12)$$

pro všechny $J_0^2 \gamma \in \text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ a všechny $J_0^2 \alpha \in L_n^2$ takové, že $\det D\alpha > 0$.

Poznamenejme, že prvky diferenciální grupy L_n^2 z této definice jsou reprezentovány difeomorfismy, které zachovávají orientaci. Ekvivalentně lze podmínku (12) vyjádřit vztahem

$$F(\bar{y}^K, \bar{y}_j^K, \bar{y}_{jk}^K) = \det(a_j^i) \cdot F(y^K, y_j^K, y_{jk}^K)$$

pro všechny body $(y^K, y_j^K, y_{jk}^K) \in \text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ (viz (6)), a všechna reálná čísla a_j^i, a_{jk}^i , kde $\det(a_j^i) > 0$.

Nechť $F : \text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce a označme ω_0 globální objemový element prostoru $\mathbf{R}^n$, $\omega_0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$. Nechť $\gamma : U \rightarrow T_n^2 \mathbf{R}^{m+n}$ je immerze definovaná na nějaké otevřené podmnožině U v $\mathbf{R}^n$ a $T_n^2 \gamma$ je její jetové prodloužení (viz (7)). Libovolná kompaktní podmnožina S v U přiřazuje funkci F integrál

$$F_S(\gamma) = \int_S (F \circ T_n^2 \gamma)(x) \omega_0. \quad (13)$$

Naším hlavním teorémem je kritérium parametrické nezávislosti integrálu (13), a pozitivní homogenity odpovídající funkce.

Teorém 1 (Euler–Zermelo) *Nechť $F : \text{Imm } T_n^2 \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}$ je diferencovatelná funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (a) *Funkce F je pozitivně homogenní.*
- (b) *Integrál $F_S(\gamma)$ (13) je invariantní vůči reparametrizaci.*
- (c) *Funkce F splňuje podmínky*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i^K} y_j^K + 2 \frac{\partial F}{\partial y_{jk}^K} y_{ik}^K = \delta_j^i F, \quad \frac{\partial F}{\partial y_{jk}^K} y_i^K = 0, \quad (14)$$

kde $1 \leq i, j, k \leq n$, and $j \leq k$.

Důkaz je založen jednak na derivování podmínky pozitivní homogenity (12), ale zejména na použití adaptovaných souřadnic $(w^i, w^\sigma, w_j^i, w_j^\sigma, w_{jk}^i, w_{jk}^\sigma)$ (11) na otevřených podmnožinách $W_n^{2(i)}$ v $\text{Imm } T_n^2 \mathbb{R}^{m+n}$ vzhledem k diferenciální grupě L_n^2 . Pro regulární křivky ($n = 1$) lze důkaz nalézt v práci Urban and Krupka [8].

Podmínky (14) jsou známy jako *Zermelovy podmínky*, které zobecňují standardní Eulerův teorém o homogenních funkcích. Pro případ n -rychlostí prvního řádu, $r = 1$, Zermelovy podmínky pro funkce více proměnných studoval McKiernan [7]. V nedávné práci Crampin a Saunders [1] aplikovali Zermelovy podmínky v rámci homogenní variační teorie na prostorech reperů nekonečného řádu.

4 HOMOGENNÍ VARIÁČNÍ ROVNICE

Uvedeme nyní stručnou charakteristiku třídy variačních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu s pozitivně homogenním Lagrangiánem.

Nechť $F : \text{Imm } T_n^1 \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce a $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ je immerze na otevřené podmnožině U v $\mathbb{R}^n$. Libovolná kompaktní podmnožina S v U přiřazuje funkci F integrál $F_S(\gamma)$, (13), a variační funkcionál

$$\gamma \rightarrow F_S(\gamma) = \int_S (F \circ T_n^1 \gamma)(x) \omega_0. \quad (15)$$

Rovnice pro extrémály funkcionálu (15) jsou *Euler–Lagrangeovy rovnice* $E_K(F) = 0$, kde $E_K(F)$ jsou reálné funkce na $\text{Imm } T_n^2 \mathbb{R}^{m+n}$,

$$E_K(F) = \frac{\partial F}{\partial y^K} - d_j \frac{\partial F}{\partial y_j^K} = \frac{\partial F}{\partial y^K} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^L \partial y_j^K} y_j^L - \frac{\partial^2 F}{\partial y_s^L \partial y_j^K} y_{js}^L, \quad (16)$$

nazývané *Euler–Lagrangeovy výrazy* funkce F . Ve vzorci (16), $d_j f$ označuje j -tou *formální derivaci* funkce $f = f(y^K, y_j^K)$ vzhledem ke kanonickým souřadnicím y^K .

Uvažujme nyní systém diferenciálních rovnic druhého řádu,

$$\varepsilon_M(y^K, y_j^K, y_{jk}^K) = 0, \quad (17)$$

$1 \leq K, M \leq m + n$, definovaný funkcemi ε_M na $\text{Imm } T_n^2 \mathbb{R}^{m+n}$. Řekneme, že (17) je variační, existuje-li reálná funkce $F : \text{Imm } T_n^1 \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ pro kterou $\varepsilon_M = E_M(F)$, tj. jestliže (17) je systémem rovnic pro extrémály jistého variačního funkcionálu (15).

Na závěr uvedeme důležitou vlastnost variačních systémů rovnic na $\text{Imm } T_n^2 \mathbb{R}^{m+n}$, definovaných pozitivně homogenními funkcemi.

Teorém 2 *Předpokládejme, že systém rovnic druhého řádu, $\varepsilon_M(y^K, y_j^K, y_{jk}^K) = 0$, (17) je variační. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (a) *Funkce ε_M jsou pozitivně homogenní.*
- (b) *Systém (17) má pozitivně homogenní Lagrangeovu funkci.*

LITERATURA

1. M. Crampin, D.J. Saunders, The Hilbert-Carathéodory form for parametric multiple integral problems in the calculus of variations. *Acta Appl. Math.* 76 (2003), 37–55.
2. D. R. Grigore and D. Krupka, Invariants of velocities and higher-order Grassmann bundles, *J. Geom. Phys.* 24 (1998) 244–264.
3. M. Kawaguchi, An Introduction to the Theory of Higher Order Spaces I: The Theory of Kawaguchi Spaces, *RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry*, Vol. III, (K. Kondo, ed.), Gakujutu Bunken Fukyu-Kai, Tokyo, 1962, 718–734.
4. K. Kondo, On the physical meaning of the Zermelo conditions of Kawaguchi space, *Tensor*, N.S. 14 (1963), 191–215.
5. D. Krupka and J. Janyška, *Lectures on Differential Invariants* (J. E. Purkyne University, Faculty of Science, Brno, Czechoslovakia, 1990, pp. 193).
6. R. Matsyuk, Autoparallel variational description of the free relativistic top third order dynamics, in: *Diff. Geom. Appl., Proc. Conf., Opava, Czech Republic, August 2001*, Silesian University in Opava, Czech Republic, 2001, 447–459.
7. M. A. McKiernan, Sufficiency of parameter invariance conditions in areal and higher-order Kawaguchi spaces, *Publ. Math. Debrecen* 13 (1966) 77–85.
8. Z. Urban and D. Krupka, The Zermelo conditions and higher order homogeneous functions, *Publ. Math. Debrecen* 82, No. 1 (2013) 59–76.



PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014–2020



EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO



Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

O HOMOGENNÍCH FUNKCÍCH V TEORII POLE DRUHÉHO ŘÁDU

Abstrakt: Standardní koncept homogenní funkce je zaveden a zobecněn pomocí užití diferenciálních grup, známých v teorii diferenciálních invariantů. Studujeme invarianci vzhledem k reparametrizacím řešení parciálních diferenciálních rovnic. Na základě tohoto přístupu obdržíme známé zobecnění Eulerova teorému, tzv. Zermelovy podmínky. Koncept pozitivní homogenity aplikujeme na variační rovnice druhého řádu v teorii pole.

Klíčová slova: Lagrangian; Eulerovy-Lagrangeovy rovnice; Zermelovy podmínky; jet; diferenciální grupa; teorie pole.

ON HOMOGENEOUS FUNCTIONS IN SECOND-ORDER FIELD THEORY

Abstract: The classical concept of a homogeneous function is introduced and extended within the theory of differential groups, known in the theory of differential invariants. Invariance under reparametrizations of solutions of partial differential equations is studied. On this basis the well-known generalizations of the Euler theorem are obtained (the Zermelo conditions). The positive homogeneity concept is then applied to second-order variational equations in field theory.

Keywords: Lagrangian, Euler-Lagrange equations, Zermelo conditions, jet, differential group, field theory.

Datum odeslání článku do redakce: 04.2017

Datum přijetí článku redakcí: 05.2017

Mgr. Ján BRAJERČÍK, Ph.D.,
Prešovská univerzita v Prešově
Katedra fyziky, matematiky a techniky
17. novembra 1, 081 16 Prešov, Slovenská republika
tel.: +421 51 7570316, e-mail: jan.brajercik@unipo.sk

RNDr. Zbyněk URBAN, Ph.D.,
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 324 152, e-mail: zbynek.urban@vsb.cz