

SYMETRIZOVANÁ NEHLADKÁ NEWTONOVA METODA PRO ŘEŠENÍ 3D KONTAKTNÍCH ÚLOH

*Radek KUČERA¹, Jaroslav HASLINGER¹,
Kristina MOTYČKOVÁ², Alexandros MARKOPOULOS²*
¹VŠB – Technická univerzita Ostrava,
²IT4Innovations, VŠB – Technická univerzita Ostrava

1 ÚVOD

Duální algebraická formulace diskretizovaných kontaktních úloh s Trescovým třením ve třech prostorových dimenzích (3D) patří do třídy úloh nazývaných QCQP (Quadratically Constrained Quadratic Program, [1]) se specifickou strukturou: minimalizovaná funkce je ostře konvexní a kvadratická vzhledem k jednoduchým nerovnostním omezením a separovatelným kvadratickým omezením (sférické pro izotropní a eliptické pro ortotropní Trescovo tření [3]).

Pro řešení těchto úloh můžeme použít implementaci nehladké Newtonovy metody s použitím aktivních množin. Avšak výsledná slanting funkce je dána nesymetrickými maticemi, a tato vlastnost nemůže být eliminována pomocí jednoduchých operací lineární algebry (narozdíl od 2D případu [5]). Naštěstí slanting funkce v bodě minima neobsahuje určité členy a je tedy možné provést symetrizaci. Zanedbáním těchto členů a-priori získáme symetrickou aproximaci slanting funkce [6]. Poté můžeme s 3D kontaktními úlohami zacházet analogicky jako s 2D úlohami [5].

Navrhujeme monotónní globalizační strategii zaručující R-lineární rychlost konvergence algoritmu. Pokud je nám známo, taková analýza pro 3D kontaktní úlohy ještě nebyla provedena.

2 ALGEBRAICKÉ KONTAKTNÍ ÚLOHY S TRESCOVÝM TŘENÍM

Primárně-duální algebraická formulace diskretizovaných kontaktních úloh s Trescovým třením je dána: najdi $(u^*, \lambda_\nu^*, \lambda_\tau^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2m}$, splňující

$$Ku + N^\top \lambda_\nu + T^\top \lambda_\tau - f = 0, \quad (1)$$

$$Nu - d \leq 0, \lambda_\nu \geq 0, \lambda_\nu^\top (Nu - d) = 0, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\bar{\lambda}_{\tau,i}\| &\leq g_i \\ \|\bar{\lambda}_{\tau,i}\| < g_i &\Rightarrow \bar{u}_{\tau,i} = 0 \\ \|\bar{\lambda}_{\tau,i}\| = g_i &\Rightarrow \exists c_i \geq 0 : \bar{u}_{\tau,i} = c_i \bar{\lambda}_{\tau,i} \end{aligned} \right\} \quad i \in \mathcal{M}, \quad (3)$$

kde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická, pozitivně definitní, $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $T \in \mathbb{R}^{2m \times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}_+^m$, a g_i jsou hodnoty $g \in \mathbb{R}_+^m$. Symboly $\bar{u}_{\tau,i}, \bar{\lambda}_{\tau,i} \in \mathbb{R}^2$ v (3) označují $\bar{u}_{\tau,i} = ((Tu)_{2i-1}, (Tu)_{2i})^\top$,

$$\bar{\lambda}_{\tau,i} = (\lambda_{\tau,2i-1}, \lambda_{\tau,2i})^\top, \quad i \in \mathcal{M}.$$

Nechť $q : \mathbb{R}^{3m} \rightarrow \mathbb{R}$ je kvadratická funkce definována jako

$$q(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^\top A \lambda - \lambda^\top b,$$

kde $\lambda = (\lambda_\nu^\top, \lambda_\tau^\top)^\top$, $A = BK^{-1}B^\top$ je symetrická, pozitivně definitní s maticí $B = (N^\top, T^\top)^\top$ s plnou řádkovou hodnotí, $b = BK^{-1}f - c$, a $c = (d^\top, 0^\top)^\top$. $r(\lambda) = A\lambda - b$ je gradient. Dále označme $\Lambda_\nu = \mathbb{R}_+^m$, $\Lambda_\tau = \Lambda_{\tau,1} \times \dots \times \Lambda_{\tau,m}$, a $\Lambda_{\tau,i} = \{\bar{\lambda}_{\tau,i} \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{\lambda}_{\tau,i}\| \leq g_i\}$, $i \in \mathcal{M}$, $\Lambda = \Lambda_\nu \times \Lambda_\tau$. Jelikož (1)-(3) reprezentuje Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky, po jednoduchých úpravách získáme *dualní* formulaci algebraických kontaktních úloh s Tre-scovým třením: najdi $\lambda^* \in \Lambda$ tak, že

$$\lambda^* = \arg \min q(\lambda) \quad \text{vzhledem k } \lambda \in \Lambda. \quad (4)$$

Jelikož q je ostře konvexní, kvadratická a Λ je uzavřená a konvexní množina, je dobře známo, že existuje jednoznačné řešení $\lambda^* \in \Lambda$ pro (4).

Nyní přeformulujeme (1)-(3) jako systém nehladkých rovnic. Zavedeme projekce $P_{\Lambda_\nu} : \mathbb{R}^m \rightarrow \Lambda_\nu$, $P_{\Lambda_\tau} : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \Lambda_\tau$. $P_{\Lambda_\nu}(\lambda_\nu) = (\phi(\lambda_{\nu,1}), \dots, \phi(\lambda_{\nu,m}))^\top$, kde $\phi(\lambda_{\nu,i}) = \max\{0, \lambda_{\nu,i}\}$, $i \in \mathcal{M}$ a $P_{\Lambda_\tau}(\lambda_\tau) = (\psi_{g_1}(\bar{\lambda}_{\tau,1}), \dots, \psi_{g_m}(\bar{\lambda}_{\tau,m}))^\top$, kde

$$\psi_{g_i}(\bar{\lambda}_{\tau,i}) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{\tau,i} & \text{if } \|\bar{\lambda}_{\tau,i}\| \leq g_i, \\ \frac{g_i}{\|\bar{\lambda}_{\tau,i}\|} \bar{\lambda}_{\tau,i} & \text{if } \|\bar{\lambda}_{\tau,i}\| > g_i. \end{cases}$$

Nechť

$$G : \mathbb{R}^{n+3m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+3m}, \quad y = (u^\top, \lambda_\nu^\top, \lambda_\tau^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n+3m}$$

je funkce definována pomocí

$$G(y) = \begin{pmatrix} Ku + N^\top \lambda_\nu + T^\top \lambda_\tau - f \\ \lambda_\nu - P_{\Lambda_\nu}(\lambda_\nu + \rho(Nu - d)) \\ \lambda_\tau - P_{\Lambda_\tau}(\lambda_\tau + \rho Tu) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

kde $\rho > 0$ je libovolný, ale pevný parametr. Je jednoduché ukázat, že (1)-(3) a rovnice

$$G(y) = 0 \quad (6)$$

mají stejné (jednoznačné) řešení $y^* = (u^{*\top}, \lambda_\nu^{*\top}, \lambda_\tau^{*\top})^\top$. Nehladká Newtonova metoda proto může být použita.

3 NEHLADKÁ NEWTONOVA METODA

Je vhodné použít koncept slant diferencovatelnosti ([2, 4]) na rovnici (6). Níže budeme používat terminologii aktivních/neaktivních množin a indikátorové matice. Co se týče podmínky nepronikání (2), použijeme $\mathcal{A}_\nu, \mathcal{I}_\nu \subseteq \mathcal{M}$ postupně jako *aktivní*, a *neaktivní*

množinu v y : $\mathcal{A}_\nu = \{i \in \mathcal{M} : 0 \leq \lambda_{\nu,i} + \rho(Nu - d)_i\}$, $\mathcal{I}_\nu = \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_\nu$. Pro Trescovo tření (2) použijeme $\mathcal{A}_\tau, \mathcal{I}_\tau \subseteq \mathcal{M}$, kde $\mathcal{A}_\tau = \{i \in \mathcal{M} : \|\bar{\lambda}_{\tau,i} + \rho\bar{u}_{\tau,i}\| \leq g_i\}$, a $\mathcal{I}_\tau = \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_\tau$. Po slant derivaci výrazu (5), se dostaneme k

$$G^o(y) = \begin{pmatrix} K & N^\top & T^\top \\ -\rho D(\mathcal{A}_\nu)N & D(\mathcal{I}_\nu) & 0 \\ G_{31}^o(y) & 0 & G_{33}^o(y) \end{pmatrix},$$

kde

$$G_{31}^o(y) = -\rho D(\bar{\mathcal{A}}_\tau)T - \rho D(\bar{\mathcal{I}}_\tau)P_{\Lambda_\tau}^o(\lambda_\tau + \rho Tu)T,$$

$$G_{32}^o(y) = 0,$$

$$G_{33}^o(y) = D(\bar{\mathcal{I}}_\tau)(I - P_{\Lambda_\tau}^o(\lambda_\tau + \rho Tu)),$$

a $P_{\Lambda_\tau}^o(\lambda_\tau + \rho Tu) = \text{diag}(\psi_{g_1}^o(\bar{y}_1), \dots, \psi_{g_m}^o(\bar{y}_m)) \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$.

Každá Newtonova iterace řeší lineární rovnici pro y^{k+1} , tj.

$$G^o(y^k)y^{k+1} = G^o(y^k)y^k - G(y^k). \quad (7)$$

3.1 Upravený algoritmus

Slanting funkce projekce na kružnice vypadá následovně:

$$\psi_\delta^o(y) = \begin{cases} I & \text{if } \|y\| \leq \delta, \\ \frac{\delta}{\|y\|} \left(I - \frac{1}{\|y\|^2} yy^\top \right) & \text{if } \|y\| > \delta, \end{cases}$$

kde $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Je jednoduché ukázat, že $I - \frac{1}{\|y\|^2} yy^\top$ je ortogonální projekcí na $\langle y \rangle^\perp$ a tedy

$$\psi_\delta^o(y)\hat{y} = 0 \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \hat{y} \in \langle y \rangle, \quad \|y\| > \delta, \quad (8)$$

kde $\langle \cdot \rangle$ označuje lineární obal. S využitím tohoto faktu, třetí bloková rovnice v (7) se rozdělí v závislosti na aktivní/neaktivní množinu na:

$$-\rho T_{\bar{\mathcal{A}}_\tau} u^{k+1} = 0, \quad \bar{\lambda}_{\tau,i}^{k+1} - \psi_{g_i}^o(\bar{y}_i^k)\bar{y}_i^{k+1} = \psi_{g_i}(\bar{y}_i^k), \quad i \in \mathcal{I}_\tau.$$

Z (8) plyne, že výrazy $\psi_{g_i}^o(\bar{y}_i^k)\bar{y}_i^{k+1}$ jdou k nule, pokud algoritmus konverguje. Proto navrhneme vypustit je a nahradit $G^o(y)$ následující aproximací:

$$\tilde{G}^o(y) = \begin{pmatrix} K & N^\top & T^\top \\ -\rho D(\mathcal{A}_\nu)N & D(\mathcal{I}_\nu) & 0 \\ -\rho D(\bar{\mathcal{A}}_\tau)T & 0 & D(\bar{\mathcal{I}}_\tau) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Lemma 1 *Nechť G a $\tilde{G}^o$ jsou postupně dány (5) a (9). Předpokládejme, že y^* je řešením $G(y) = 0$. Pokud posloupnost upravených Newtonovských iterací*

$$y^{k+1} = y^k - \tilde{G}^o(y^k)^{-1}G(y^k) \quad (10)$$

konverguje, pak její limitou je y^ .*

Důkaz Viz [6]. □

Každý iterační krok (10) vede na lineární rovnici, jež je rozdělena následovně:

$$\lambda_{\nu, \mathcal{I}_\nu}^{k+1} = 0, \quad \bar{\lambda}_{\tau, i}^{k+1} = \psi_{g_i}(\bar{y}_i^k), \quad i \in \mathcal{I}_\tau \quad (11)$$

a

$$\begin{pmatrix} K & N_{\mathcal{A}_\nu}^\top & T_{\bar{\mathcal{A}}_\tau}^\top \\ N_{\mathcal{A}_\nu} & 0 & 0 \\ T_{\bar{\mathcal{A}}_\tau} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ \lambda_{\nu, \mathcal{A}_\nu}^{k+1} \\ \lambda_{\tau, \bar{\mathcal{A}}_\tau}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - T_{\bar{\mathcal{I}}_\tau}^\top \lambda_{\tau, \bar{\mathcal{I}}_\tau}^{k+1} \\ d_{\mathcal{A}_\nu} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro vytvoření výpočetně efektivní nepřesné implementace, za použití jednoduchých úprav pro eliminaci $\{u^k\}$ a také přeformulování aktivních/neaktivních množin (bez použití u), přejdeme k duální implementaci algoritmu, kde redukovaný gradient je použit jako ukončovací kritérium.

ALGORITMUS MSSN (Upravená nehladká Newtonova metoda)

Mějme dány $\lambda^0 \in \mathbb{R}^{3m}$, $\rho > 0$, a $\varepsilon \geq 0$. Nastavme $err^0 = \|\tilde{r}_\rho(P_\Lambda(\lambda^0))\|$ a $k = 0$.

(Krok 1) Pokud $err^k \leq \varepsilon$, vraťme $\lambda = P_\Lambda(\lambda^k)$ nebo pokračujme na Step 2.

(Krok 2) Určeme aktivní/neaktivní množiny pro λ^k :

$$\mathcal{A}_\nu = \{i \in \mathcal{M} : \lambda_i^k - \rho r_i^k \geq 0\}, \quad \mathcal{I}_\nu = \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_\nu, \quad (12)$$

$$\mathcal{A}_\tau = \{i \in \mathcal{M} : \|\bar{\lambda}_{\tau, i}^k - \rho \bar{r}_i^k\| \leq g_i\}, \quad \mathcal{I}_\tau = \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_\tau. \quad (13)$$

(Krok 3) Najdi λ^{k+1} tak, že

$$\lambda^{k+1} = \arg \min q(\lambda) \quad \text{vzhledem k (11)}. \quad (14)$$

(Krok 4) Nastavme $err^{k+1} = \|\tilde{r}_\rho(P_\Lambda(\lambda^{k+1}))\|$, $k = k + 1$ a pokračujme na Step 1.

Hlavním rozdílem mezi ALGORITMEM MSSN a jeho 2D protějškem je v počtu kroků ukončení. 2D algoritmus je ukončen po konečném počtu kroků (viz [5]). Díky projekcím na kružnice s nekonečně mnoha hraničními body musí ALGORITMUS MSSN zpracovat nekonečně mnoho lineárních rovnic.

4 NEPŘESNÝ A GLOBÁLNĚ KONVERGENTNÍ ALGORITMUS

Nejprve vytvoříme nepřesnou implementaci algoritmu, tj. řešení (14) získáme za použití metody konjugovaných gradientů. Adaptivní řízení přesnosti ((Step 3.1)) je použito pro akceptování nepřesných vnitřních řešení. Tuto variantu algoritmu označíme jako ALGORITMUS IMSSN.

Stěžejním nápadem pro vytvoření globálně konvergentní varianty algoritmu je zajištění toho, aby generovaná posloupnost $\{q(\lambda^k)\}$ byla monotónně klesající. K tomu použijeme horní mez pro ρ a zajistíme, aby všechny iterace patřily do Λ , tj. zvolíme $\lambda^0 \in \Lambda$

a ukončíme cyklus konjugovaných gradientů před tím, než je vygenerována iterace mimo Λ (CGM_{feas}). Pro zjednodušení našeho výkladu označíme: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\nu \cup \{i + m : i \in \bar{\mathcal{A}}_\tau\}$ a $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, 3m\} \setminus \mathcal{A}$.

ALGORITMUS GIMSSN (Globálně konvergentní IMSSN metoda)

Mějme dány $\lambda^0 \in \Lambda$, $\rho \in (0, 2\sigma_{\max}^{-1})$, $\varepsilon \geq 0$, a $r_{tol}, c_{fact} \in (0, 1)$.

Nastavme $err^0 = \|\tilde{r}_\rho(\lambda^0)\|$, $tol^0 = r_{tol}/c_{fact}$, a $k = 0$.

(Step 1) Pokud $err^k \leq \varepsilon$, vraťme $\lambda = \lambda^k$ nebo pokračujme na Step 2.

(Step 2) Určeme aktivní/neaktivní množiny pro λ^k pomocí (12)-(13).

(Step 3.1) $tol^{k+1} = \min\{r_{tol} \times err^k / err^0, c_{fact} \times tol^k\}$.

(Step 3.2) $\lambda^{k+1,0} = P_\Lambda(\lambda^k - \rho r(\lambda^k))$.

(Step 3.3) $\lambda^{k+1} = \text{CGM}_{feas}(A, b, \mathcal{A}, \lambda^{k+1,0}, tol^{k+1})$.

(Step 4) Nastavme $err^{k+1} = \|\tilde{r}_\rho(\lambda^{k+1})\|$, $k = k + 1$, a pokračujme na Step 1.

Rozdíl oproti 2D případu spočívá v zacházení se sférickými omezeními, tj. projekce P_Λ a testem přípustnosti v CGM_{feas} .

Věta 1 *Nechť $\lambda^0 \in \Lambda$, $\varepsilon = 0$, $\rho \in (0, 2\sigma_{\max}^{-1})$, a $r_{tol}, c_{fact} \in (0, 1)$. Nechť $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$ jsou postupně nejmenší a největší vlastní čísla matice A , a nechť λ^* je řešením (4). Nechť $\{\lambda^k\}$ označuje posloupnost generovanou ALGORITMEM GIMSSN. Pak platí následující:*

(i) *posloupnost $\{q(\lambda^k)\}$ je klesající tak, že*

$$q(\lambda^{k+1}) - q(\lambda^*) \leq \eta(\rho) (q(\lambda^k) - q(\lambda^*)),$$

kde

$$\eta(\rho) = \begin{cases} 1 - \rho\sigma_{\min} & \text{for } \rho \in (0, \sigma_{\max}^{-1}], \\ 1 - (2\sigma_{\max}^{-1} - \rho)\sigma_{\min} & \text{for } \rho \in [\sigma_{\max}^{-1}, 2\sigma_{\max}^{-1}); \end{cases}$$

(ii) *pokud $\{\lambda^k\}$ je konečná, pak její poslední člen je λ^* ;*

(iii) *pokud $\{\lambda^k\}$ je nekonečná, pak konverguje k λ^* R-lineárně tak, že*

$$\|\lambda^k - \lambda^*\| \leq C \eta(\rho)^{k/2},$$

kde $C = \sqrt{2(q(\lambda^0) - q(\lambda^*))/\sigma_{\min}}$.

Důkaz Viz [5], Věta 3.

5 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Ukážeme chování algoritmů na úloze kontaktu dvou těles, které jsou dány oblastmi $\Omega_1 = (0, 2) \times (0, 1) \times (1, 2)$ a $\Omega_2 = (0, 2) \times (0, 1) \times (0, 1)$ (v [m]). Tělesa jsou z izotropního,

homogenního materiálu, který charakterizuje Youngův modul 50000 [MPa] a Poissonova konstanta 0.277 pro Ω_1 a 0.35 pro Ω_2 . Rozdělení $\partial\Omega_1$ a $\partial\Omega_2$ jsou následující:

$$\begin{aligned}\gamma_1^u &= \{2\} \times (0, 1) \times (1, 2), \quad \gamma_1^c = (0, 2) \times (0, 1) \times \{1\}, \quad \gamma_1^p = \partial\Omega_1 \setminus \overline{\gamma_1^u \cup \gamma_1^c}, \\ \gamma_2^u &= \{0\} \times (0, 1) \times (0, 1), \quad \gamma_2^c = (0, 2) \times (0, 1) \times \{1\}, \quad \gamma_2^p = \partial\Omega_2 \setminus \overline{\gamma_2^u \cup \gamma_2^c}.\end{aligned}$$

Mez kluzu na γ_1^c je dána konstantou $g = 0.09$ (v [MPa]). Objemové síly jsou zanedbány pro obě tělesa. Povrchové síly $p = (0, 0, -1)$ (v [MPa]) působí na vrchní část $(0, 2) \times (0, 1) \times \{2\}$ a levou vertikální část $\{0\} \times (0, 1) \times (1, 2)$ tělesa Ω_1 . Úloha je diskretizována pomocí metody konečných prvků.

V tabulce níže zaznamenáváme počty násobení maticí A (n_A) a počty vnějších (Newtonovských) iterací ($iter$), tj. poslední hodnota k , pro různé stupně volnosti n a m . Hodnota n_A charakterizuje početní náročnost.

Příklad 1. V Tabulce 1 srovnáváme efektivitu ALGORITMU IMSSN s duální implementací ALGORITMU SSN (varianta algoritmu bez modifikace). U ALGORITMU SSN použijeme metodu BiCGSTAB [7] pro získání nepřesných řešení vnitřních lineárních rovnic. Je patrné, že výpočty založené na symetrických vnitřních lineárních rovnicích jsou podstatně efektivnější.

Tab. 1 Symetrizovaná versus nesymetrizovaná varianta nehladké Newtonovy metody.

	IMSSN	SSN
n/m	$iter/n_A$	$iter/n_A$
24576/256	10/161	9/1180
55566/441	9/143	9/1428
105456/676	10/185	11/2506
178746/961	10/190	10/2162
279936/1296	9/167	10/2298
413536/1681	10/216	10/2586

ZÁVĚR

Analýzovali jsme řešení kontaktních úloh s Trescovým třením ve 3D. Analýza je podobná 2D případu, viz [5]. Poukázali jsme na hlavní rozdíly mezi těmito dvěma případy. 3D případ je komplikovanější především kvůli projekcím na kružnice ve $\mathbb{R}^2$ popisující třecí zákon ve 3D.

PODĚKOVÁNÍ

Tato práce byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v rámci projektů Národního programu udržitelnosti (NPU II) „IT4Innovations excelentní vý-

zkum - LQ1602“ a Velkých infrastruktur pro výzkum, experimentální vývoj a inovace „IT4Innovations Národní superpočítačové centrum – LM2015070“.

LITERATURA

1. S. Boyd, L. Vandenberghe. *Convex optimization*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.
2. X. Chen, Z. Nashed, L. Qi. “Smoothing methods and semismooth methods for non-differentiable operator equations”, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 38, 2000, p. 1200–1216.
3. J. Haslinger, R. Kučera, T. Kozubek. “Convex programming with separable ellipsoidal constraints: application in contact problems with orthotropic friction”, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 101, 2014, p. 221–242.
4. M. Hintermüller, K. Ito, K. Kunisch. “The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method”, *SIAM J. Optim.*, Vol. 13, 2003, p. 865–888.
5. R. Kučera, K. Motyčková, A. Markopoulos. “The R-linear convergence rate of an algorithm arising from the semi-smooth Newton method applied to 2D contact problems with friction”, *Comput. Optim. Appl.*, Vol. 61, 2015, p. 437–461.
6. R. Kučera, K. Motyčková, A. Markopoulos, J. Haslinger. “On the inexact symmetrized globally convergent semi-smooth Newton method for 3D contact problems with Tresca friction: the R-linear convergence rate”, in preparation.
7. H. A. Van der Vorst. “Bi-CGSTAB: A Fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 13, 1992, p. 631–644.



PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014–2020



EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO



Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

SYMETRIZOVANÁ NEHLADKÁ NEWTONOVA METODA PRO ŘEŠENÍ 3D KONTAKTNÍCH ÚLOH

Abstrakt: V práci je analyzována nehladká Newtonova metoda pro řešení diskretizovaných kontaktních úloh s Trescovým třením ve třech prostorových dimenzích. Slanting funkce je aproximována za účelem získání symetrických vnitřních lineárních úloh. Aby bylo možné použít metodu sdružených gradientů, je primárně-duální algoritmus převeden na ryze duální. R-lineární rychlost konvergence je dokázána pro nepřesnou globálně konvergentní variantu metody. Závěrem jsou uvedeny numerické experimenty. Řešení kontaktních úloh má řadu významných praktických uplatnění, např. biologické procesy, design strojů a přepravních systémů, tváření kovů nebo medicína (modelování kostních náhrad).

Klíčová slova: kontaktní úloha; Trescovo tření; nehladká Newtonova metoda; metoda sdružených gradientů; projekce gradientu; rychlost konvergence.

SYMMETRIZED SEMI-SMOOTH NEWTON METHOD FOR SOLVING 3D CONTACT PROBLEMS

Abstract: The semi-smooth Newton method for solving discretized contact problems with Tresca friction in three space dimensions is analyzed. The slanting function is approximated to get symmetric inner linear systems. The primal-dual algorithm is transformed into the dual one so that the conjugate gradient method can be used. The R-linear convergence rate is proved for an inexact globally convergent variant of the method. Numerical experiments conclude the paper. The solution of contact problems is of crucial importance in various practical applications, e.g. biological processes, design of machines and transportation systems, metal forming, or medicine (modeling of bone replacements).

Keywords: contact problem; Tresca friction; semi-smooth Newton method; conjugate gradient method; gradient projection; convergence rate.

Datum odeslání článku do redakce: 04.2017

Datum přijetí článku redakcí: 05.2017

prof. RNDr. Radek KUČERA, Ph.D., prof. RNDr. Jaroslav HASLINGER, Ph.D.,

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie

17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika

tel.: +420 597 324 126, e-mail: radek.kucera@vsb.cz, jaroslav.haslinger@vsb.cz



PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014–2020



EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO



Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

Mgr. Kristina MOTYČKOVÁ, Ph.D., Ing. Alexandros MARKOPOULOS, Ph.D.

IT4Innovations, VŠB – Technická univerzita Ostrava

17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika

tel.: +420 597 329 761, e-mail: kristina.motyckova@vsb.cz, alexandros.markopoulos@vsb.cz