PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP "Przekraczamy Granice"

EXTREMÁLNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ V PROGRAMU GEOGEBRA

Zuzana MORÁVKOVÁ, Petr VOLNÝ
VŠB – Technická univerzita Ostrava

1 ÚVOD

Pro budoucí bakaláře a inženýry je nezbytná nejenom teoretická znalost matematiky, ale je nutné, aby byli schopni aplikovat matematiku na reálné úlohy z praxe. Proto jsme kurzy matematiky na naší univerzitě obohatili o aplikované úlohy. Za tímto účelem jsme využili volně šiřitelný software GeoGebra, který díky své hratelnosti a interaktivitě motivuje studenty pro studium matematiky. Studenti se učí formulovat problém, převést problém do matematického jazyka, modelovat různé situace v souvislosti se zadanými vstupními informacemi.

Příspěvek byl připraven s pomocí následujících citací, [1–5].

2 EXTREMÁLNÍ ÚLOHY

S extremálními úlohami se setkáváme již od časů antiky a starověkého Řecka. Byly to především geometrické úlohy. Typickým příkladem je tzv. izoperimetrický problém: hledání uzavřené křivky známé délky ohraničující oblast s maximálním obsahem. Řešením problému je samozřejmě kružnice. Později se extremální úlohy začaly objevovat v mnoha různých matematických disciplínách v souvislosti s rozvojem matematické analýzy a především diferenciálního počtu.

S extremálními úlohami se setkáváme nejenom v matematice. Ve skutečnosti veškerá lidská činnost intuitivně směřuje k hledání řešení jistých extremálních problémů. Pokoušíme se dostat někam v co nejkratším čase, snažíme se minimalizovat vzdálenost, po které cestujeme, snažíme se nakoupit co nejvíce za co nejméně peněz, atd.

Extremální úlohy v matematice představují pěkný příklad reálné aplikovatelnosti diferenciálního kalkulu. GeoGebra nám umožňuje získat geometrickou představu o studovaném problému. Umožňuje sestavit dynamický model a odhadnout řešení. Takový odhad pak můžeme porovnat s řešením nalezeným pomocí matematické formulace úlohy, tj. většinou se jedná o nalezení extrému nějaké funkce.

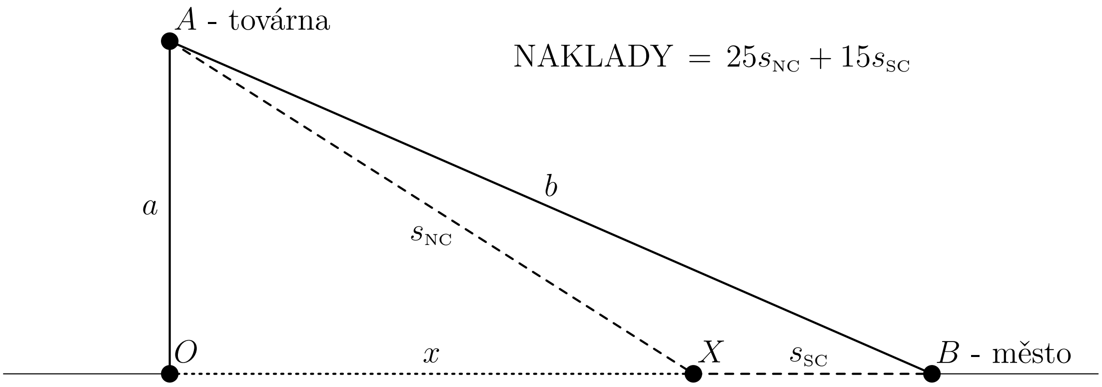
3 ÚLOHA: MINIMÁLNÍ DOPRAVNÍ NÁKLADY

Úloha: Uvažujme továrnu ležící nedaleko cesty vedoucí do města. Minimální vzdálenost mezi továrnou a cestou je a km, přičemž přímá vzdálenost továrny od města je b km.

Je nutné postavit novou cestu, která spojí továrnou se starou cestou (v bodě X), viz následující obrázek. Náklady na dopravu po nové cestě jsou 25 € a 15 € po staré cestě na km. Kde se nachází bod X spojující starou a novou cestu, aby náklady na dopravu zboží z továrny do města byly minimální?

3.1 Vizualizace úlohy

Na následujícím obrázku se nachází geometrická formulace úlohy.



Obr. 1 Extremální úloha – náklady na dopravu

Zdroj: vlastní práce

Označme délku nové cesty s_{NC} a staré cesty s_{SC}. Platí:

$$s_{\mathrm{NC}} = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad s_{\mathrm{SC}} = \sqrt{b^2 - a^2} - x. \tag{1}$$

Náklady na dopravu jsou:

$$f = 25s_{\mathrm{NC}} + 15s_{\mathrm{SC}} = 25\sqrt{a^2 + x^2} + 15\left(\sqrt{b^2 - a^2} - x\right). \tag{2}$$

V následující podkapitole ukazujeme, jak sestavit dynamický geometrický model v GeoGebře, a umožňujeme čtenáři odhadnout řešení pomocí tohoto modelu. V podkapitole 3.3 studujeme funkci (2) a nalezneme exaktní řešení úlohy pomocí vnitřního příkazu GeoGebra `Extrem`.

Analytické řešení problému se nachází v podkapitole 3.4 ve formě typické pro standardní matematickou přednášku bez použití výpočetní techniky.

3.2 Interaktivní pomůcka v GeoGebře

Nejdříve úlohu zformulujeme geometricky, parametry a a b jsou reprezentovány posuvníky (viz Fig. 2).

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP "Przekraczamy Granice"

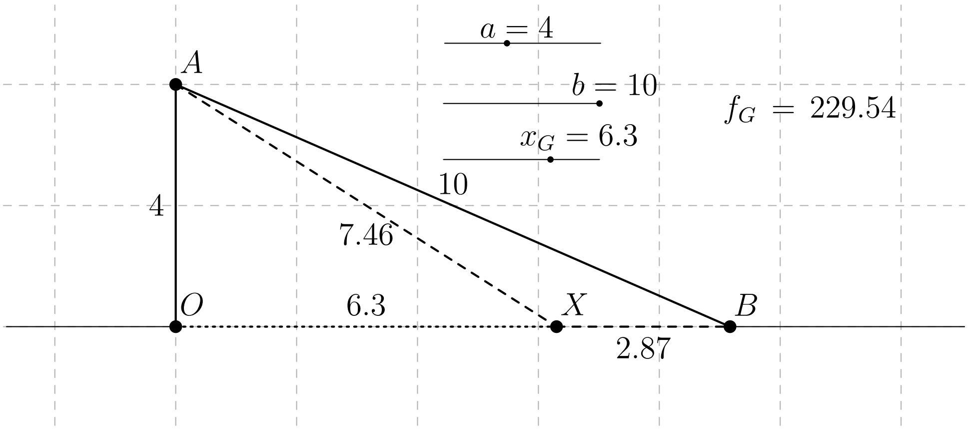
1.		Vložit *Posuvník* `a` od 0 do 10 s krokem 0.1, změnit barvu na zelenou. Nastavit hodnotu `4`.
2.		Vložit *Posuvník* `b` od 0 do 10, s krokem 0.1, změnit barvu na modrou. Nastavit hodnotu na `10`.
3.		Vytvořit bod `A` vložením `A=(0,a)` do pole *Vstup*.
4.		Vytvořit objekt *Kružnice* `c` se středem v `A` a poloměrem `b`.
5.		*Průsečík* mezi kružnicí `c` a osou `OsaX`. Získáme dva průsečíky. Správný průsečík je ten pravý, `B`.
6.		Vytvořit bod `O` vložením `O=(0,0)` do pole *Vstup*.
7.		Vytvořit objekt *Přímka* procházející body `O` a `B` a přejmenovat ji na `cesta`.
8.		Vytvořit objekt *Úsečka* `AO` mezi body `A` a `O`, zobrazit hodnotu (délku) této úsečky, změnit barvu na zelenou. Je délka této úsečky stejná jako hodnota posuvníku `a`?
9.		Vytvořit objekt *Úsečka* `AB` mezi `A` a `B`, zobrazit délku úsečky, změnit barvu na modrou. Je délka stejná jako hodnota posuvníku `b`?
10.		Vytvořit objekt *Úsečka* `OB` mezi `O` a `B`, zobrazit délku úsečky.
11.		Měnit hodnoty posuvníků a ověřovat hodnoty délek úseček a posuvníků stejné barvy.

Poloha bodu X je dána vzdáleností mezi X a počátkem soustavy souřadnic, a je reprezentovaná posuvníkem x_G, (viz Fig. 2).

12.		Vytvořit objekt *Posuvník* `x_G` od 0 do `sqrt(b^2-a^2)`, změnit barvu na červenou. Nastavit hodnotu na `5`.
13.		Vytvořit bod `X` vložením `X=(x_G,0)` do pole *Vstup*, červená barva.
14.		Vytvořit objekt *Úsečka* `AX` mezi `A` a `X`, zobrazit délku úsečky.
15.		Vytvořit objekt *Úsečka* `XB` mezi `X` a `B`, zobrazit délku úsečky.
16.		Vytvořit objekt *Úsečka* `OX` mezi `O` a `X`, zobrazit délku usečky, barvu na červenou.
17.		Vložit `f_G=25*AX+15*XB` do pole *Vstup*. Přetáhnout myší `f_G` z Algebraického okna do Nákresny.
18.		Pokusit se změnou hodnot posuvníku `s` nalézt minimální hodnotu `f_G`.

Abychom minimalizovali náklady na dopravu, musíme minimalizovat funkci f_G, což závisí na hodnotě posuvníku x_G. Následující obrázek je připraven v černobílé verzi.

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP "Przekraczamy Granice"



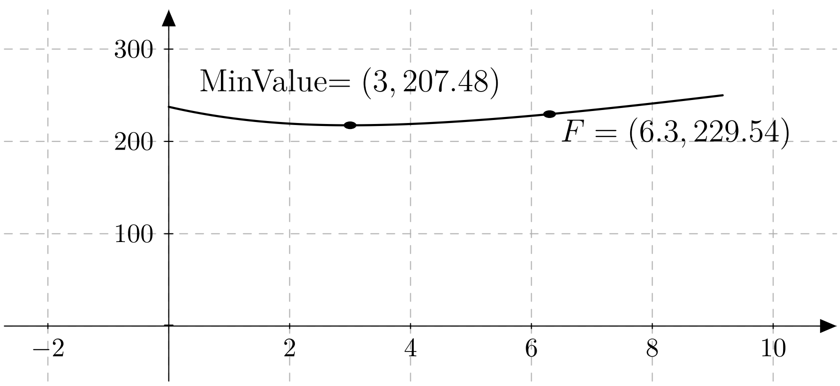
Obr. 2 Extremální úloha – geometrický model

Zdroj: vlastní práce

3.3 „Funkce“ – matematický model

Dalším krokem je konstrukce symbolické reprezentace úlohy. Místo konkrétní hodnoty posuvníku x_G (respektive f_G) zavádíme proměnnou x (respektive funkci $f(x)$), viz Fig. 3.

19.	*Zobrazit*	Zobrazíme pole *Nákresna 2* pro umístění následujících objektů.
20.		Vložit do pole *Vstup* příkaz. `f(x)=Function[25*sqrt(a^2+x^2)+15*(sqrt(b^2-a^2)-x),0,d]`
21.		Vložit `MinValue=Extrem[f,0,d]` do pole *Vstup*, změnit barvu na oranžovou.
22.		Vložit `F=(x_G,f(x_G))` do pole *Vstup*, změnit barvu na červenou.



Obr. 3 Extremální úloha – minimalizovaná funkce

Zdroj: vlastní práce

3.4 Analytické řešení úlohy

Derivujme funkci f:

$$f(x) = 25\sqrt{a^2 + x^2} + 15\left(\sqrt{b^2 - a^2} - x\right),$$
$$f'(x) = 25\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 15.$$

Z podmínky pro stacionární body funkce f okamžitě dostáváme:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 25\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3a}{4}.$$

4 ZÁVĚR

Od studentů jsme obdrželi velmi pozitivní zpětnou vazbu v souvislosti se začleněním extremálních úloh do matematických přednášek. GeoGebra je jeden z nejlepších programů pro vizualizaci takových úloh, a přispívá k lepšímu pochopení kalkulu.

PODĚKOVÁNÍ

Autoři děkují za podporu svému pracovišti.

LITERATURA

1. R. J. Harshbarger, J. J. Reynolds. *Calculus with Applications*. Lexington, MA: D. C. Heath & Company, 1990.
2. G . James. *Modern Engineering Mathematics*. MA: Addison-Wesley, 1992.
3. W. F. Trench. *Introduction to Real Analysis*. (free ed. 1.02).
4. `http://www.geogebra.org`
5. `http://www.geogebra.org/en/wiki`

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

EXTREMÁLNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ V PROGRAMU GEOGEBRA

Abstrakt: *Řešení aplikovaných úloh je jeden z vhodných způsobů pro lepší pochopení matematických konceptů především pro budoucí inženýry. Díky své interaktivitě je GeoGebra velmi užitečný nástroj pro modelování takových úloh.*

Klíčová slova: *GeoGebra, extremální úlohy.*

EXTREMA PROBLEMS SOLVED IN GEOGEBRA

Abstract: *The solving of applied problems is a reasonable way to gain better understanding of mathematical concepts, especially for future engineers. GeoGebra is a very useful tool for modeling these problems thanks to its interactivity.*

Keywords: *GeoGebra, extrema problems.*

Datum odeslání článku do redakce: 04.2017
Datum přijetí článku redakcí: 05.2017

Mgr. Zuzana MORÁVKOVÁ, Ph.D.,
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 324 152, e-mail: zuzana.moravkova@vsb.cz

RNDr. Petr VOLNÝ, Ph.D.,
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 324 152, e-mail: petr.volny@vsb.cz