

VARIAČNÍ ROVNICE NA MÖBIOVĚ PÁSCE

Zbyněk URBAN, Jana VOLNÁ
VŠB – Technická univerzita Ostrava

1 ÚVOD

Cílem této práce je studium zúžení obyčejných diferenciálních rovnic, definovaných na Eukleidově prostoru, vzhledem k topologicky netriviálnímu příkladu vložené podvariety – *Möbiovy pásy*. Obecný problém spočívá v tom, jak topologie podvariety ovlivňuje variačnost diferenciálních rovnic a strukturu odpovídajících lokálních a globálních variačních principů.

K tomu účelu zavedeme hladký atlas na Eukleidově prostoru, který je adaptovaný vzhledem k Möbiově pásce a studujeme jeho vlastnosti. Aplikujeme výsledky teorie variační posloupnosti na svazcích diferenciálních forem; koncept variační posloupnosti v této práci ovšem nezavádíme a odkazujeme na Krupka [2], Volná a Urban [8]; rovněž pro srovnání Takens [7]). Naší hlavní citací je zejména nedávná práce Krupka, Urban, Volná [4], kde byla formulována obecná teorie variačních podvariet.

Standardní pojmy z oblasti hladkých variet lze nalézt např. v Lee [5]. Základní pojmy z teorie jetů, stejně jako úvod do variačních principů na fibrovaných varietách viz. Krupka a Saunders [3]. Klasickou učebnicí teorie svazků, na kterých je založeno studium lokální a globální variačnosti, je Warner [9].

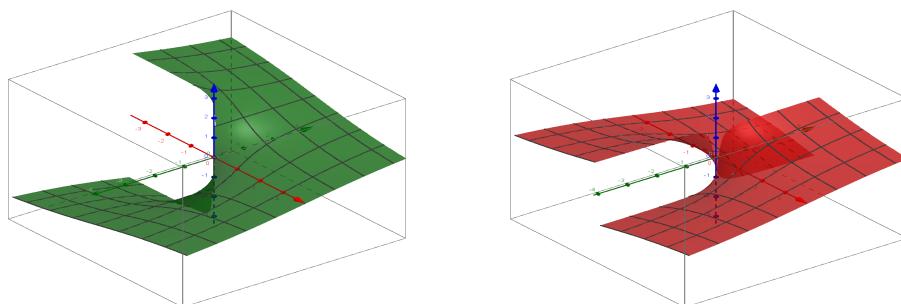
Globální kartézské souřadnice na Eukleidově prostoru $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$, značíme (x, y) , resp. (x, y, z) . Používáme standardní Einsteinovu sumační konvenci. Všechny obrázky byly vytvořeny v programu GeoGebra.

2 POLÁRNÍ SOUŘADNICE A FUNKCE $\arctan$ SE DVĚMA ARGUMENTY

Připomeňme nejprve standardní modifikaci funkce $\arctan$, kterou dále aplikujeme při zavádění souřadnicových systémů. Funkce atan2 na $\mathbb{R}^2$ bez počátku, definovaná předpisem

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \text{ (I. a IV. kvadrant, kladná osa } x) \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \text{ (II. kvadrant, záporná osa } x) \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0 \text{ (III. kvadrant)} \\ \pi/2, & x = 0, y > 0 \text{ (kladná osa } y) \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0 \text{ (záporná osa } y) \\ \text{není definován,} & x = 0, y = 0 \text{ (počátek } (0, 0) \in \mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (1)$$

se někdy také nazývá *arkustangens se dvěma argumenty*. Poznamenejme, že tato funkce má obor hodnot interval $(-\pi, \pi]$, a že grafy funkcí atan2 a $\text{atan}(y/x)$ splývají v I. a IV. kvadrantu, jak je patrné na následujícím Obrázku 1.



Obr. 1 Graf funkce $(x, y) \rightarrow \text{atan2}(y, x)$ (zelená) a Graf funkce $(x, y) \rightarrow \text{atan}(y/x)$ (červená)

Zdroj: vlastní zpracování

Funkce atan2 byla původně zavedena v programovacích jazycích a později využita také v dalších oblastech vědy a inženýrství. Je obsažena například v programech Matlab, Java, C++, Geogebra, Mathematica a také ve většině tabulkových programů.

V této práci aplikujeme funkci atan2 na konstrukci adaptovaných souřadnic k Möbiově pásce v $\mathbb{R}^3$. Volba souřadnic je motivována následujícím standardním faktem. Na otevřené množině $U = \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$ v $\mathbb{R}^2$, jsou definovány polární souřadnice $\Phi = (r, \varphi)$, kde r je vzdálenost bodu z U od počátku $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, a φ je úhel s hodnotami v intervalu $(-\pi, \pi)$ mezi průvodičem bodu z U a kladným směrem osy x . Transformace od polárních ke kartézským souřadnicím $\Phi^{-1} : \Phi(U) \rightarrow U$, kde $\Phi(U) = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, a k ní inverzní transformace $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$, jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \quad x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ \Phi : \quad r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \text{atan2}(y, x), \end{aligned}$$

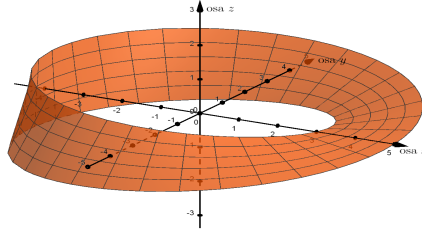
kde funkce atan2 je definována vztahem (1).

3 ATLAS ADAPTOVANÝ K MÖBIOVĚ PÁSCĚ

V této části uvažujeme Möbiovu pásku $M_{R,a}$ (bez okraje) s *poloměrem* R a *šířkou* $2a$, kde $0 < a < R$, jakožto dvojrozměrnou kanonicky vloženou podvarietu Eukleidova prostoru $\mathbb{R}^3$. $M_{R,a}$ se také někdy nazývá *otevřená Möbiova páska* a lze ji parametrizovat rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \left(R + \tau \cos \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi, \\ y &= \left(R + \tau \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi, \\ z &= \tau \sin \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

kde $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-a < \tau < a$, viz. následující Obrázek 2.



Obr. 2 Möbiova páska $M_{R,a}$ pro $R = 4, a = 1$

Zdroj: vlastní zpracování

Rovnice (2) lze využít ke konstrukci hladkého atlasu na otevřené podmnožině X v $\mathbb{R}^3$,

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}, \quad (3)$$

který obsahuje dva *adaptované souřadnicové systémy* k $M_{R,a}$. Označme

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}) \quad (4)$$

otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^3$, a položíme $\Psi = (\varphi, \tau, \kappa)$, kde

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{atan2}(y, x), \\ \tau &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + \text{sgn}(y)z \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}, \\ \kappa &= - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \text{sgn}(y) \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} + z \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Lze přímo ověřit, že (V, Ψ) tvoří souřadnicový systém na X . Inverzní zobrazení $\Psi^{-1} : \Psi(V) \rightarrow V$ k Ψ je totiž dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \left(R + \tau \cos \frac{\varphi}{2} - \kappa \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \varphi, \\ y &= \left(R + \tau \cos \frac{\varphi}{2} - \kappa \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi, \\ z &= \tau \sin \frac{\varphi}{2} + \kappa \cos \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

kde definiční obor $\Psi(V)$ je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^3$ s vyjádřením

$$\Psi(V) = \left\{ (\varphi, \tau, \kappa) \in \mathbb{R}^3 \mid -\pi < \varphi < \pi, \tau > \frac{-R + \kappa \sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)}, \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

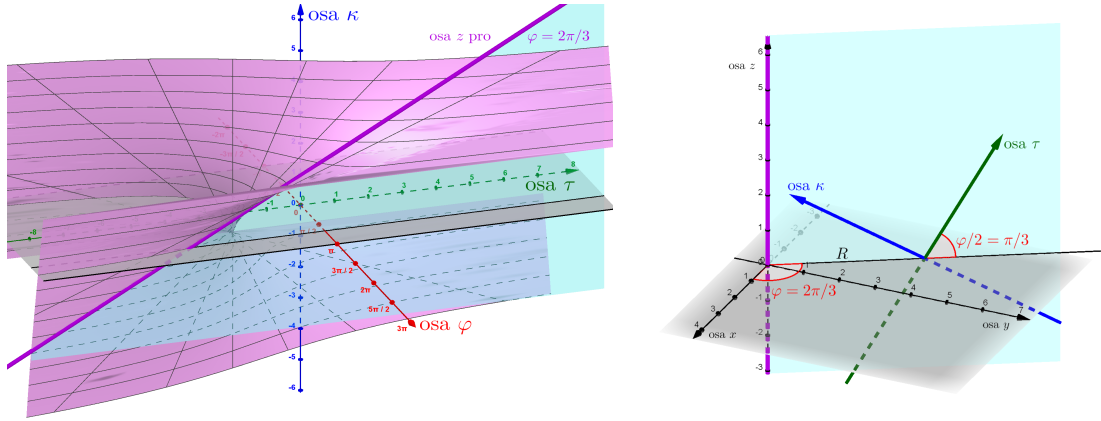
Jakobián $\det J$ zobrazení Ψ^{-1} je všude *různý* od nuly,

$$\det J = -R - \tau \cos \frac{\varphi}{2} + \kappa \sin \frac{\varphi}{2} < 0.$$

Poznamenejme, že $\Psi(V)$ je *ohraničená* plochou o rovnici

$$\tau = \frac{-R + \kappa \sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)},$$

obsahující počátek v $\mathbb{R}^3$; pro konstantní φ je $\Psi(V)$ ohraničená přímkami (viz. Obrázek 3, zvýrazněná hraniční přímka pro $\varphi = 2\pi/3$). Odpovídající polorovina s osami τ a κ je znázorněna na Obrázku 3.



Obr. 3 Hraniční plocha a jedna z polorovin pro první souřadnicový systém

Zdroj: vlastní zpracování

Porovnáme-li parametrizaci (2) Möbiovy pásy $M_{R,a}$ a transformace souřadnic (5), (6), můžeme se snadno přesvědčit, že $M_{R,a}$ je určena rovnicí $\kappa = 0$, kde $\tau \in (-a, a)$. Dvojici (V, Ψ) , $\Psi = (\varphi, \tau, \kappa)$, danou (4) a (5), nazýváme *první adaptovaný souřadnicový systém* k Möbiově pásce $M_{R,a}$.

Abychom získali atlas na X (3), doplníme (V, Ψ) dalším souřadnicovým systémem. Uvažujme otevřenou podmnožinu

$$\bar{V} = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}), \quad (7)$$

v $\mathbb{R}^3$ a zobrazení $\bar{\Psi} = (\bar{\varphi}, \bar{\tau}, \bar{\kappa})$, kde

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \begin{cases} \text{atan2}(y, x), & y \geq 0, \\ \text{atan2}(y, x) + 2\pi, & y < 0, \end{cases} \\ \bar{\tau} &= -\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} - \text{sgn}(y)z \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}, \\ \bar{\kappa} &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right) \text{sgn}(y) \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} - z \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Inverzní zobrazení $\bar{\Psi}^{-1} : \bar{\Psi}(\bar{V}) \rightarrow \bar{V}$ má rovnice

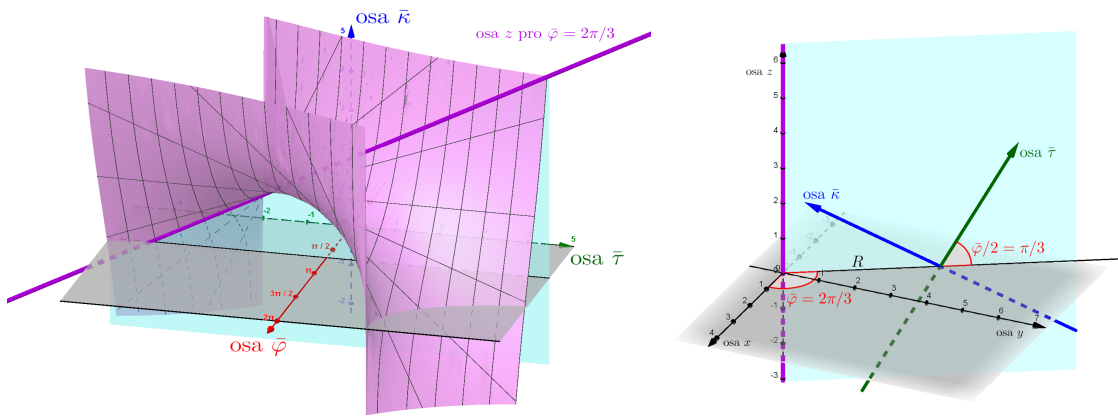
$$\begin{aligned} x &= \left(R + \bar{\tau} \cos \frac{\bar{\varphi}}{2} - \bar{\kappa} \sin \frac{\bar{\varphi}}{2}\right) \cos \bar{\varphi}, & y &= \left(R + \bar{\tau} \cos \frac{\bar{\varphi}}{2} - \bar{\kappa} \sin \frac{\bar{\varphi}}{2}\right) \sin \bar{\varphi}, \\ z &= \bar{\tau} \sin \frac{\bar{\varphi}}{2} + \bar{\kappa} \cos \frac{\bar{\varphi}}{2} \end{aligned}$$

přičemž definiční obor $\bar{\Psi}(\bar{V})$ je otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^3$ vyjádřená vztahem

$$\bar{\Psi}(\bar{V}) = \left\{ (\bar{\varphi}, \bar{\tau}, \bar{\kappa}) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \bar{\varphi} < 2\pi, \bar{\tau} \in \mathbb{R}, \bar{\kappa} < \frac{R + \bar{\tau} \cos(\bar{\varphi}/2)}{\sin(\bar{\varphi}/2)} \right\}.$$

I tentokrát je snadno vidět, že $\bar{\Psi}(\bar{V})$ je shora ohraňovaná plochou (viz. Obrázek 4) o rovnici

$$\bar{\kappa} = \frac{R + \bar{\tau} \cos(\bar{\varphi}/2)}{\sin(\bar{\varphi}/2)}.$$



Obr. 4 Hraniční plocha a jedna z polorovin pod ní pro druhý souřadnicový systém

Zdroj: vlastní zpracování

V souřadnicovém systému $(\bar{V}, \bar{\Psi})$, je $M_{R,a}$ charakterizována rovnicí $\bar{\kappa} = 0$, kde $\bar{\tau} \in (-a, a)$. Souřadnicový systém $(\bar{V}, \bar{\Psi})$ $\bar{\Psi} = (\bar{\varphi}, \bar{\tau}, \bar{\kappa})$, definovaný vztahy (7) a (8), nazýváme *druhý adaptovaný souřadnicový systém* k Möbiově pásce $M_{R,a}$. Zřejmě, $X = V \cup \bar{V}$. Zbývá ještě ukázat, že souřadnicové transformace mezi (V, Ψ) a $(\bar{V}, \bar{\Psi})$ jsou diferencovatelné. Zúžíme-li oba souřadnicové systémy na

$$V \cap \bar{V} = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}),$$

dostaneme souřadnicové transformace

$$\Psi \circ \bar{\Psi}^{-1} : \bar{\Psi}(\bar{V}) \setminus \{\bar{\varphi} = \pi\} \rightarrow \Psi(V) \setminus \{\varphi = 0\},$$

$$\Psi \circ \bar{\Psi}^{-1}(\bar{\varphi}, \bar{\tau}, \bar{\kappa}) = \begin{cases} (\bar{\varphi}, \bar{\tau}, \bar{\kappa}), & \bar{\varphi} \in (0, \pi), \\ (\bar{\varphi} - 2\pi, -\bar{\tau}, -\bar{\kappa}), & \bar{\varphi} \in (\pi, 2\pi), \end{cases}$$

a

$$\bar{\Psi} \circ \Psi^{-1} : \Psi(V) \setminus \{\varphi = 0\} \rightarrow \bar{\Psi}(\bar{V}) \setminus \{\bar{\varphi} = \pi\},$$

$$\bar{\Psi} \circ \Psi^{-1}(\varphi, \tau, \kappa) = \begin{cases} (\varphi, \tau, \kappa), & \varphi \in (0, \pi), \\ (\varphi + 2\pi, -\tau, -\kappa), & \varphi \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že souřadnicové systémy (V, Ψ) a $(\bar{V}, \bar{\Psi})$ tvoří hladký atlas na X (3), *adaptovaný* k Möbiově pásce $M_{R,a}$.

4 VARIČNÍ ROVNICE NA MÖBIOVĚ PÁSCE

Uvažujme nyní kanonické vložení

$$\iota : \mathbb{R} \times M_{R,a} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \quad (9)$$

které je morfismem fibrovaných variet nad identickým zobrazením $\text{id}_{\mathbb{R}}$ reálné přímky $\mathbb{R}$. Jetové prodloužení

$$J^2\iota : J^2(\mathbb{R} \times M_{R,a}) \rightarrow J^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad (10)$$

vložení ι je definované pro každý řez $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R} \times M_{R,a}$ na otevřené podmnožině $U \subset \mathbb{R}$ vztahem $J^2\iota(J_t^2\gamma) = J_t^2(\iota \circ \gamma)$. Poznamenejme, že zobrazení $J^2\iota$ (10) působí na diferenciální formy definované na $J^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ ve smyslu operace *pull-back*. Souřadnicové vyjádření $J^2\iota$ nalezneme přímým výpočtem. Necht $(V \cap M_{R,a}, \Psi|_{V \cap M_{R,a}})$, $\Psi|_{V \cap M_{R,a}} = (\varphi, \tau)$, je souřadnicový systém na $M_{R,a}$, asociovaný s prvním adaptovaným souřadnicovým systémem (V, Ψ) , $\Psi = (\varphi, \tau, \kappa)$, (4), (5). Předpokládejme, že ι (9) je vyjádřené rovnicemi

$$t \circ \iota = t, \quad x \circ \iota = f^1(\varphi, \tau), \quad y \circ \iota = f^2(\varphi, \tau), \quad z \circ \iota = f^3(\varphi, \tau),$$

kde

$$f^1(\varphi, \tau) = \left(R + \tau \cos \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi, \quad f^2(\varphi, \tau) = \left(R + \tau \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi, \quad f^3(\varphi, \tau) = \tau \sin \frac{\varphi}{2},$$

vzhledem ke kartézským souřadnicím (t, x, y, z) na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ a asociovaným souřadnicím (t, φ, τ) na $\mathbb{R} \times (V \cap M_{R,a})$. Pak $J^2\iota$ je dáno v asociovaných souřadnicích $(t, \varphi, \tau, \dot{\varphi}, \dot{\tau}, \ddot{\varphi}, \ddot{\tau})$ rovnicemi

$$\begin{aligned} t \circ J^2\iota &= t, & x \circ J^2\iota &= f^1(\varphi, \tau), & y \circ J^2\iota &= f^2(\varphi, \tau), & z \circ J^2\iota &= f^3(\varphi, \tau), \\ \dot{x} \circ J^2\iota &= \frac{d}{dt}f^1(\varphi, \tau), & \dot{y} \circ J^2\iota &= \frac{d}{dt}f^2(\varphi, \tau), & \dot{z} \circ J^2\iota &= \frac{d}{dt}f^3(\varphi, \tau), \\ \ddot{x} \circ J^2\iota &= \frac{d^2}{dt^2}f^1(\varphi, \tau), & \ddot{y} \circ J^2\iota &= \frac{d^2}{dt^2}f^2(\varphi, \tau), & \ddot{z} \circ J^2\iota &= \frac{d^2}{dt^2}f^3(\varphi, \tau), \end{aligned}$$

kde $df^i/dt = (\partial f^i/\partial \varphi)\dot{\varphi} + (\partial f^i/\partial \tau)\dot{\tau}$, $i = 1, 2, 3$, je operátor formální derivace funkce.

Uvažujme systém diferenciálních rovnic druhého řádu na $J^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$,

$$\varepsilon_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

pro neznámé křivky $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$. Levým stranám rovnic (11) přiřadíme diferenciální zdrojovou formu

$$\varepsilon = \varepsilon_i \omega^i \wedge dt, \quad (12)$$

kde $\omega^1 = dx - \dot{x}dt$, $\omega^2 = dy - \dot{y}dt$, a $\omega^3 = dz - \dot{z}dt$, jsou kontaktní 1-formy splňující $(J^1\gamma)^*\omega^i = 0$ pro každý řez γ v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. V souladu s obecnou teorií variačních rovnic řekneme, že systém (11) (nebo zdrojová forma (12)) je *lokálně variační*, jestliže existuje

reálná funkce $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ pro kterou (11) je systémem *Euler–Lagrangeových rovnic*, tj.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}. \quad (13)$$

Jestliže $\mathcal{L}$ existuje, nazývá se *Lagrangeova funkce* systému (11), a (11) reprezentuje systém rovnic pro extremály variačního funkcionálu asociovaného s $\mathcal{L}$.

Nutné a postačující podmínky pro (lokální) variačnost systému diferenciálních rovnic jsou známé *Helmholtzovy podmínky*. Pro systém druhého řádu (11) máme následující výsledek. Označme $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, a analogicky pro tečkované souřadnice.

Teorém 1 *Nechť ε je zdrojová forma daná vztahem (12). Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (a) *Rovnice (13) má řešení.*
- (b) *Funkce ε_i splňují podmínky*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \ddot{x}^j} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \ddot{x}^i} &= 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \dot{x}^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \ddot{x}^j} + \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \ddot{x}^i} \right) = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \dot{x}^i} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Důkaz Odkazujeme na Sarlet [6], nebo Krupka [1].

Indukovaná zdrojová forma $(J^2\iota)^\varepsilon$ na $J^2(\mathbb{R} \times M_{R,a})$ má vyjádření*

$$(J^2\iota)^*\varepsilon = \varepsilon_\varphi \omega^\varphi \wedge dt + \varepsilon_\tau \omega^\tau \wedge dt, \quad (14)$$

kde $\omega^\varphi = d\varphi - \dot{\varphi}dt$, $\omega^\tau = d\tau - \dot{\tau}dt$, a

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= (\varepsilon_1 \circ J^2\iota) (-R \sin \varphi + (\tau/2) \sin(\varphi/2) - 3\tau \cos^2(\varphi/2) \sin(\varphi/2)) \\ &\quad + (\varepsilon_2 \circ J^2\iota) (R \cos \varphi + \tau \cos(\varphi/2) - 3\tau \cos(\varphi/2) \sin^2(\varphi/2)) + (\varepsilon_3 \circ J^2\iota) (\tau/2) \cos(\varphi/2), \\ \varepsilon_\tau &= (\varepsilon_1 \circ J^2\iota) (\cos(\varphi/2) - 2 \cos(\varphi/2) \sin^2(\varphi/2)) \\ &\quad + 2(\varepsilon_2 \circ J^2\iota) \sin(\varphi/2) \cos^2(\varphi/2) + (\varepsilon_3 \circ J^2\iota) \sin(\varphi/2). \end{aligned}$$

Podle Teorému 1, indukovaná zdrojová forma $(J^2\iota)^*\varepsilon$ je lokálně variační tehdy a jen tehdy, když její komponenty ε_φ a ε_τ splňují

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \ddot{\tau}} - \frac{\partial \varepsilon_\tau}{\partial \ddot{\varphi}} &= 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \ddot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_\tau}{\partial \dot{\tau}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varepsilon_\tau}{\partial \ddot{\tau}} = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \dot{\tau}} + \frac{\partial \varepsilon_\tau}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \ddot{\tau}} + \frac{\partial \varepsilon_\tau}{\partial \ddot{\varphi}} \right) &= 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial \varepsilon_\tau}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \dot{\tau}} - \frac{\partial \varepsilon_\tau}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Jestliže jsou tyto podmínky splněny, pak z teorie variační posloupnosti vyplývá, že $(J^2\iota)^*\varepsilon$, nebo systém rovnic $\varepsilon_\varphi = 0$ a $\varepsilon_\tau = 0$, je také *globálně variační*, tj. pro $(J^2\iota)^*\varepsilon$ existuje Lagrangeova funkce $\mathcal{L}$ definovaná na celém jetovém prodloužení $J^2(\mathbb{R} \times M_{R,a})$ Möbiovy pásy $M_{R,a}$.

ZÁVĚR

V práci je prezentována aplikace variační teorie na hladkých varietách. Je popsán hladký atlas v $\mathbb{R}^3$ adaptovaný k Möbiově pásce a následně aplikován na analýzu zúžení diferenciálních rovnic z Eukleidova prostoru na Möbiovu pásku.

PODĚKOVÁNÍ

Autoři děkují za podporu svého pracoviště.

LITERATURA

1. D. Krupka. "On the local structure of the Euler–Lagrange mapping of the calculus of variations", in: *Proc. Conf. Diff. Geom. Appl.*, Charles University, Prague, 1981, p. 181–188; arXiv:math-ph/0203034.
2. D. Krupka. "Variational sequences in mechanics", *Calc. Var.*, Vol. 5, 1997, p. 557–583.
3. D. Krupka, D. Saunders (Eds.). *Handbook of Global Analysis*, Elsevier, Amsterdam, 2008.
4. D. Krupka, Z. Urban, J. Volná. "Variational submanifolds of Euclidean spaces", submitted, 2017.
5. J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 2012.
6. W. Sarlet. "The Helmholtz conditions revisited. A new approach to the inverse problem of Lagrangian dynamics", *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 15, 1982, p. 1503–1517.
7. F. Takens. "A global version of the inverse problem of the calculus of variations", *J. Diff. Geom.*, Vol. 14, 1979, p. 543–562.
8. J. Volná, Z. Urban. "First-order Variational Sequences in Field Theory", in: D. Zenkov (Ed.), *The Inverse Problem of the Calculus of Variations, Local and Global Theory*, Atlantis Press, Amsterdam–Beijing–Paris, 2015, p. 215–284.
9. F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, 2nd Ed., Springer, New York, 1983.



PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014–2020



EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO



Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

VARIAČNÍ ROVNICE NA MÖBIOVĚ PÁSCE

Abstrakt: V tomto článku je studována variačnost systémů obyčejných diferenciálních rovnic (dynamických forem v geometrické mechanice) druhého řádu, kterou indukuje kanonické vložení dvojrozměrné Möbiovy pásky do Eukleidova prostoru. Pro daný nevariační systém rovnic jsou formulovány nutné a postačující podmínky variačnosti (Helmholtzovy podmínky). Práce je příspěvkem k variačním základům geometrické mechaniky na Möbiově pásce.

Klíčová slova: Lagrangian; Euler-Lagrangeovy rovnice; Helmholtzovy podmínky; fibrovaná varieta; Möbiova páska.

VARIATIONAL EQUATIONS ON THE MÖBIUS STRIP

Abstract: In this paper, systems of second-order ordinary differential equations (or dynamical forms in Lagrangian mechanics), induced by the canonical embedding of the two-dimensional Möbius strip into the Euclidean space, are considered in the class of variational equations. For a given non-variational system, the conditions assuring variationality (Helmholtz conditions) for the induced system on the Möbius strip are formulated. The theory contributes to variational foundations of geometric mechanics.

Keywords: Lagrangian; Euler-Lagrange equations; Helmholtz conditions; fibered manifold; Möbius strip.

Datum odeslání článku do redakce: 04.2017

Datum přijetí článku redakcí: 05.2017

RNDr. Zbyněk URBAN, Ph.D.,
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 324 152, e-mail: zbynek.urban@vsb.cz

RNDr. Jana VOLNÁ, Ph.D.,
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 324 152, e-mail: jana.volna@vsb.cz