PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

TLUMENÁ ŘEŠENÍ SINGULÁRNÍ ÚLOHY S ϕ-LAPLACIÁNEM

Jakub STRYJA
VŠB – Technická univerzita Ostrava

1 ÚVOD

Budeme se zabývat rovnicí

$$(p(t)\phi(u'(t)))' + p(t)f(\phi(u(t))) = 0,\ t > 0 \tag{1}$$

za počátečních podmínek

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \quad u_0 \in [L_0, L], \tag{2}$$

kde

$$\phi \in C^1(\mathbb{R}), \quad \phi'(x) > 0 \text{ for } x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{3}$$

$$\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \phi(0) = 0, \tag{4}$$

$$L_0 < 0 < L, \quad f(\phi(L_0)) = f(0) = f(\phi(L)) = 0, \tag{5}$$

$$f \in C[\phi(L_0), \phi(L)], \quad xf(x) > 0 \text{ for } x \in ((\phi(L_0), \phi(L)) \setminus \{0\}), \tag{6}$$

$$p \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty), \quad p'(t) > 0 \text{ for } t \in (0,\infty), \quad p(0) = 0. \tag{7}$$

Poznámka 1. Integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}$ může být divergentní a vzhledem k předpokladu $p(0) = 0$ je rovnice (1) singulární v $t = 0$.

Příklad 2. Položme $\phi(x) = |x|^\alpha \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $\alpha \geq 1$. Potom $\phi'(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}$ a podmínky (3) a (4) platí. Jako příklad funkce f splňující podmínky (5) a (6) můžeme vzít funkci $f(x) = x\,(x - \phi(L_0))\,(\phi(L) - x)$, $x \in \mathbb{R}$. Funkce $p(t) = t^\beta$, $t \in [0,\infty)$, $\beta > 0$ splňuje (7).

Byli jsme motivováni problémy například z hydrodynamiky nebo nelineární teorie pole.

V modelech studujících chování nehomogenní kapaliny v Cahn-Hillardově teorii v hydrodynamice dostáváme systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \nabla(\mu(\rho) - \gamma\Delta\rho) = 0,$$

kde ρ je hustota, v rychlost proudění kapaliny, $\mu(\rho)$ je její chemický potenciál a γ je konstanta. Jestliže je kapalina v klidu, je její stav v $\mathbb{R}^N$ popsán rovnicí

$$\gamma\Delta\rho = \mu(\rho) - \mu_0,$$

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

kde γ a μ_0 jsou konstanty. Hustota v bublině plynu závisí na vzdálenosti od středu. Pokud hledáme sféricky symetrické řešení, rovnice se zredukuje na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\gamma\left(\rho'' + \frac{N-1}{r}\rho'\right) = \mu(\rho) - \mu_0, \quad r \in (0,\infty),$$

která společně s podmínkami

$$\rho'(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho_\ell > 0,$$

popisuje tvorbu mikroskopických bublin, například páry, v kapalině. Podmínku $\rho'(0) = 0$ dostáváme ze symetrie. Tato podmínka je nezbytná pro hladkost řešení v $r = 0$. Podmínka $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho_\ell$ znamená, že bublina je obklopena kapalinou s hustotou ρ_ℓ.

Nechť $N = 3$. V nejjednodušších případech pro nehomogenní kapalinu dostáváme rovnici

$$\left(t^2 u'\right)' = 4\lambda^2 t^2 (u+1)u(u-\xi), \tag{8}$$
$$u(\infty) = \xi, \quad u'(0) = 0,$$

kde $\lambda \in (0,\infty)$ a $\xi \in (0,1)$ jsou parametry. Mnoho fyzikálních vlastností bublin, například hustota plynu uvnitř bubliny, její poloměr nebo povrchové napětí, závisí na existenci rostoucího řešení s jediným nulovým bodem.

Naše rovnice (1) je zobecněním rovnice (8). Rovnice

$$(p(t)u'(t))' + q(t)f(u(t)) = 0,$$

bez ϕ-Laplaciánu byla zkoumána pro $p \equiv q$ v [7–10], pro $p \not\equiv q$ v $[1, 3, 11, 12]$ a s ϕ-Laplaciánem v $[2, 4–6]$.

Definice 3. Funkci $u \in C^1[0,\infty)$ s $\phi(u') \in C^1(0,\infty)$ splňující rovnici (1) pro všechna $t \in (0,\infty)$ nazýváme *řešení* rovnice (1). Jestliže navíc funkce u splňuje počáteční podmínky (2), potom ji nazveme *řešení* problému (1), (2).

Poznámka 4. Rovnice (1) má konstantní řešení $u(t) \equiv L$, $u(t) \equiv 0$ a $u(t) \equiv L_0$.

Definice 5. Nechť u je řešení problému (1), (2) s $u_0 \in (L_0, L)$. Označme

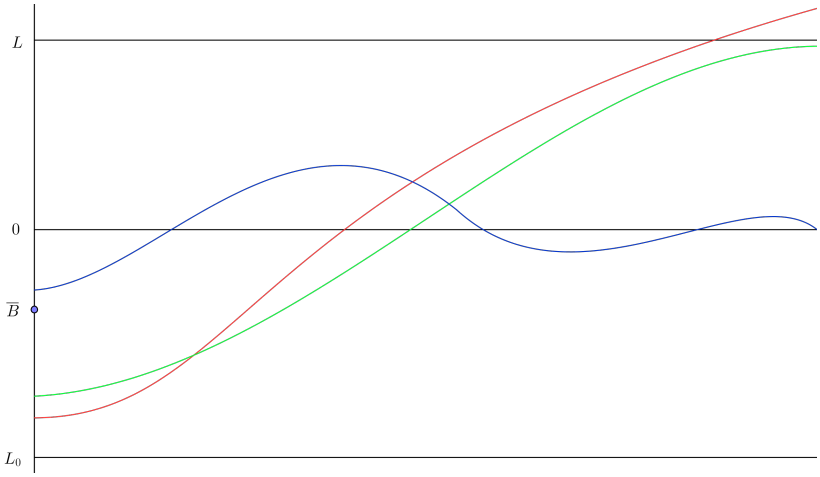
$$u_{sup} = \sup\{u(t) \colon t \in [0,\infty)\}.$$

Nechť $u_{sup} < L$, potom u nazveme *tlumené řešení* problému (1), (2).
Nechť $u_{sup} = L$, potom u nazveme *homoklinické řešení* problému (1), (2).
Homoklinické řešení nazveme *regulární homoklinické řešení*, jesliže $u(t) < L$ pro $t \in [0,\infty)$ a *singulární homoklinické řešení*, jestliže existuje $t_0 > 0$ takové, že $u(t_0) = L$.
Nechť $u_{sup} > L$, potom u nazveme *únikové řešení* problému (1), (2).

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"



Obr. 1 Tři typy řešení.

Zdroj: vlastní

2 EXISTENCE ŘEŠENÍ POMOCNÉ ÚLOHY

Abychom ukázali existenci tlumených řešení, budeme muset nejprve zkoumat pomocnou úlohu s omezenou nelinearitou

$$(p(t)\phi(u'(t)))' + p(t)\tilde{f}(\phi(u(t))) = 0, \quad t \in (0,\infty), \tag{9}$$

kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in [\phi(L_0), \phi(L)], \\ 0 & \text{pro } x < \phi(L_0),\ x > \phi(L). \end{cases} \tag{10}$$

Věta 6 (Existence řešení pomocné úlohy (9), (2), [2])**.** *Nechť platí* (3)–(7)*. Potom pro všechna* $u_0 \in [L_0, L]$ *existuje řešení* u *problému* (9), (2)*.*

Příklad 7. Nechť $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dáno jedním z následujících předpisů

$$\phi(x) = |x|^\alpha \operatorname{sgn} x, \quad \alpha > 1, \tag{11}$$

$$\phi(x) = \left(x^4 + 2x^2\right) \operatorname{sgn} x, \tag{12}$$

$$\phi(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{13}$$

$$\phi(x) = \operatorname{arg\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \tag{14}$$

$$\phi(x) = \ln(|x|+1) \operatorname{sgn} x. \tag{15}$$

Předpokládejme, že $\phi(L) < -\phi(L_0)$ a položme

$$p(t) = t^\beta, \quad t \in [0,\infty), \ \beta > 0,$$
$$f(x) = k|x|^\gamma \operatorname{sgn} x(x - \phi(L_0))(\phi(L) - x), \quad x \in [\phi(L_0), \phi(L)], \ \gamma > 0, \ k > 0.$$

Potom funkce p, ϕ a f splňují všechny předpoklady Věty 6 a tedy pomocná úloha (9), (2) má řešení pro všechna $u_0 \in [L_0, L]$.

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

3 JEDNOZNAČNOST A SPOJITÁ ZÁVISLOST NA POČÁTEČNÍCH PODMÍNKÁCH PRO POMOCNOU ÚLOHU

Existence ϕ-Laplaciánu v rovnici (1) přináší problémy při studiu jednoznačnosti. Například, jestliže $\phi(x) = |x|^\alpha \operatorname{sgn} x$ a $\alpha > 1$, potom je ϕ lipschitzovská na $\mathbb{R}$. Na druhou stranu, $\phi^{-1} = |x|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sgn} x$ a $(\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\alpha}|x|^{\frac{1}{\alpha}-1}$. Platí $\lim_{x\to 0}(\phi^{-1})'(x) = \infty$ a funkce ϕ^{-1} není lipschitzovská v nule. Obě funkce ϕ i ϕ^{-1} se vyskytují v operátorové formě problému (1), (2) a proto nemůžeme použít standardní postup s lipschitzovskou konstantou k důkazu jednoznačnosti v okolí nuly. Budeme rozlišovat dva případy.

- V prvním případě budou funkce ϕ^{-1} a f lipschitzovsky spojité. V tomto případě máme zaručenu jednoznačnost řešení.
- Ve druhém případě nebude funkce ϕ^{-1} lipschitzovsky spojitá.

Věta 8 (Jednoznačnost a spojitá závislost na počátečních podmínkách I, [2])**.** *Nechť platí* (3)–(7) *a*

$$f \in \operatorname{Lip}\left[\phi(L_0), \phi(L)\right], \tag{16}$$

$$\phi^{-1} \in \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}). \tag{17}$$

Nechť u_i, $i = 1, 2$ *jsou dvě řešení problému* (9), (2) *s* $u_0 = B_i \in [L_0, L]$. *Potom pro libovolné* $\beta > 0$ *existuje* $K > 0$ *takové, že*

$$\|u_1 - u_2\|_{C^1[0,\beta]} \le K|B_1 - B_2|.$$

Navíc pro všechna $u_0 \in [L_0, L]$ *existuje jediné řešení problému* (9), (2) *definované na intervalu* $[0, \infty)$.

Příklad 9. Abychom mohli apkikovat Větu 8 musí být ϕ i ϕ^{-1} z $\operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Podívejme se na funkce ϕ z příkladu 7:

$$\begin{aligned}
&\phi(x) = |x|^\alpha \operatorname{sgn} x, \quad \alpha > 1 && \Rightarrow \phi^{-1}(x) = |x|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sgn} x && \notin \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\\
&\phi(x) = \left(x^4 + 2x^2\right) \operatorname{sgn} x, && \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt{|x|+1} - 1} && \notin \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\\
&\phi(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, && \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \operatorname{arg\,sinh} x && \in \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\\
&\phi(x) = \operatorname{arg\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) && \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \sinh x && \in \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\\
&\phi(x) = \ln(|x|+1) \operatorname{sgn} x && \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \left(e^{|x|-1}\right) \operatorname{sgn} x && \in \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Vezměme p, f z Příkladu 7 s $\gamma \ge 1$ a ϕ definované předpisy (13)–(15). Potom jsou splněny všechny předpoklady Věty 8 a problém (9), (2) má jediné řešení pro $u_0 \in [L_0, L]$. Nechť $\gamma \in (0, 1)$, potom není funkce f lipschitzovsky spojitá v okolí nuly a podmínka (16) neplatí. Podobně pokud je ϕ dáno předpisy (11) nebo (12), ϕ^{-1} není lipschitzovsky spojité v okolí nuly a (17) neplatí.

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

V následujících dvou větách ukážeme předpoklady za kterých řešení pomocné úlohy (9), (2) spojitě závisí na počátečních podmínkách v případě, že funkce ϕ^{-1} není lokálně lipschitzovsky spojitá.

Předpokládejme, že

$$\exists \bar{B} \in (L_0, 0) \colon \tilde{F}\left(\bar{B}\right) = \tilde{F}(L), \qquad \text{kde } \tilde{F}(x) = \int_0^x \tilde{f}(\phi(s))\mathrm{d}s, \quad x \in \mathbb{R} \tag{18}$$

a

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{p'(t)}{p(t)} < \infty. \tag{19}$$

Věta 10 (Spojitá závislost na počátečních podmínkách II, [2]). *Nechť platí* (3)–(7), (16), (18), (19) *a*

$$\limsup_{x\to 0^-} \left(-x\left(\phi^{-1}\right)'(x)\right) < \infty, \quad \phi' \text{ je nerostoucí na } (-\infty, 0). \tag{20}$$

Nechť B_1, B_2 *splňují*

$$B_1 \in (2\varepsilon, L - 2\varepsilon), \quad |B_1 - B_2| < \varepsilon$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$. *Nechť* u_i *je řešením problému* (9), (2) *s* $u_0 = B_i$, $i = 1, 2$. *Potom pro libovolné* $\beta > 0$ *splňující*

$$u_i' < 0 \text{ na } (0, \beta], \ i = 1, 2,$$

existuje $K \in (0, \infty)$ *takové, že*

$$\|u_1 - u_2\|_{C^1[0,\beta]} \le K|B_1 - B_2|.$$

Věta 11 (Spojitá závislost na počátečních podmínkách III, [2]). *Nechť platí* (3)–(7), (16), (18), (19) *a*

$$\limsup_{x\to 0^+} \left(x\left(\phi^{-1}\right)'(x)\right) < \infty, \quad \phi' \text{ je neklesající na } (0, \infty). \tag{21}$$

Nechť B_1, B_2 *splňují*

$$B_1 \in (L_0 + 2\varepsilon, -2\varepsilon), \quad |B_1 - B_2| < \varepsilon$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$. *Nechť* u_i *je řešením problému* (9), (2) *s* $u_0 = B_i$, $i = 1, 2$. *Potom pro libovolné* $\beta > 0$ *splňující*

$$u_i' > 0 \text{ na } (0, \beta], \ i = 1, 2,$$

existuje $K \in (0, \infty)$ *takové, že*

$$\|u_1 - u_2\|_{C^1[0,\beta]} \le K|B_1 - B_2|.$$

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

4 EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST TLUMENÝCH ŘEŠENÍ

Lemma 12 (Odhady řešení, [2]). *Nechť platí podmínky* (3)–(7), (18) *a* (19). *Nechť* u *je řešením problému* (9), (2) *s* $u_0 \in (L_0, 0) \cup (0, L)$. *Potom*

$$u_0 \in \left[\bar{B}, 0\right) \cup (0, L) \quad \Rightarrow \quad \bar{B} < u(t) < L, \quad t \in (0, \infty)\,, \tag{22}$$

$$u_0 \in \left(L_0, \bar{B}\right) \quad \Rightarrow \quad u_0 < u(t), \quad t \in (0, \infty)\,. \tag{23}$$

Poznámka 13. Vzhledem k (10), (22), (23) a Definici 5 je u tlumené nebo homoklinické řešení pomocné úlohy (9), (2) právě když je u tlumené nebo homoklinické řešení původního problému (1), (2).

Věta 14 (Existence tlumených řešení problému (1), (2), [2]). *Nechť platí* (3)–(7), (19) *a*

$$\exists \bar{B} \in (L_0, 0) : \int_0^{\bar{B}} f(\phi(z))\mathrm{d}z = \int_0^{L} f(\phi(z))\mathrm{d}z.$$

Potom pro všechna $u_0 \in \left[\bar{B}, L\right)$ *má problém* (1), (2) *řešení. Všechna řešení problému* (1), (2) *s* $u_0 \in \left[\bar{B}, L\right)$ *jsou tlumená.*

Příklad 15. Problém (1), (2) s p, f a ϕ z Příkladu 7 má pro libovolné $u_0 \in [\bar{B}, L)$ tlumené řešení.

Poznámka 16. Podle Věty 14 existují homoklinické nebo únikové řešení pouze pokud $u_0 \in \left(L_0, \bar{B}\right)$.

Pokud $\phi^{-1} \notin \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ dokážeme jednoznačnost tlumených řešení pomocí Vět 10 a 11. Protože se tvrzení týká tlumených řešení, můžeme, vzhledem k Poznámce 13, následující větu formulovat pro originální problém (1), (2).

Věta 17 (Jednoznačnost tlumených řešení, [2]). *Nechť platí* (3)–(7), (16), (18), (19), (20) *a* (21). *Nechť* u *je tlumeným řešením problému* (1), (2) *s* $u_0 \in (L_0, 0) \cup (0, L)$. *Potom je* u *jediným řešením tohoto problému.*

LITERATURA

1. J. Burkotová, M. Hubner, I. Rachůnková, E. B. Weinmüller. “Asymptotic properties of Kneser solutions to nonlinear second order ODEs with regularly varying coefficients”, *J. Appl. Math. Comp.*, Vol. 274, 2015, p. 65–82.
2. J. Burkotová, I. Rachůnková, M. Rohleder, J. Stryja. “Existence and uniqueness of damped solutions of singular IVPs with ϕ-Laplacian”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, Vol. 2016, No. 121, 2016, p. 1–28.
3. J. Burkotová, M. Rohleder, J. Stryja. “On the existence and properties of three types of solutions of singular IVPs”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* Vol. 2015, No. 29, 2015, p. 1–25.

4. Z. Došlá, M. Marini, S. Matucci. "A boundary value problem on a half-line for differential equations with indefinite weight", *Commun. Appl. Anal.*, Vol. 15, 2011, p. 341–352.

5. J. Jaroš, T. Kusano, J. V. Manojlović. "Asymptotic analysis of positive solutions of generalized Emden-Fowler differential equations in the framework of regular variation", *Cent. Eur. J. Mathc.*, Vol. 11, No. 12, 2013, p. 2215–2233.

6. S. Matucci, P. Řehák. "Asymptotics of decreasing solutions of coupled p-Laplacian systems in the framework of regular variation", *Ann. Mat. Pura Appl.*, Vol. 193, 2014, p. 837–858.

7. I. Rachůnková, L. Rachůnek, J. Tomeček. "Existence of oscillatory solutions of singular nonlinear differential equations", *Abstr. Appl. Anal.*, Vol. 2011, p. 1–20.

8. I. Rachůnková, J. Tomeček. "Homoclinic solutions of singular nonautonomous second order differential equations", *Bound. Value Probl.*, Vol. 2009, p. 1–21.

9. I. Rachůnková, J. Tomeček. "Strictly increasing solutions of a nonlinear singular differential equation arising in hydrodynamics", *Nonlinear Anal.*, Vol. 72, 2010, p. 2114–2118.

10. I. Rachůnková, J. Tomeček, J. Stryja. "Oscillatory solutions of singular equations arising in hydrodynamics", *Adv. Difference Equ.*, Vol. 2010, p. 1–13.

11. M. Rohleder. "On the existence of oscillatory solutions of the second order nonlinear ODE" *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.* Vol. 51, No. 2, 2012, p. 107–127.

12. J. Vampolová. "On existence and asymptotic properties of Kneser solutions to singular second order ODE", *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.*, Vol 52, No. 1, 2013, p. 135–152.

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

TLUMENÁ ŘEŠENÍ SINGULÁRNÍ ÚLOHY S ϕ-LAPLACIÁNEM

Abstrakt: *Budeme se zabývat chováním řešení singulární obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s ϕ-Laplaciánem*

$$(p(t)\phi(u'(t)))' + p(t)f(\phi(u(t))) = 0$$

na polopřímce $[0,\infty)$ za počátečních podmínek

$$u(0) = u_0 \in [L_0, L], \quad u'(0) = 0.$$

Funkce f je spojitá a má tři nulové body, funkce p je kladná na $(0,\infty)$ a dále platí $p(0) = 0$. Integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}$ může být divergentní, což způsobuje singularitu v $t = 0$. Naše rovnice zobecňuje rovnice vyskytující se v modelech například v hydrodynamice nebo v nelineární teorii pole.

Klíčová slova: *diferenciální rovnice druhého řádu, časová singularita, existence a jednoznačnost, ϕ-Laplacián, tlumené řešení.*

DAMPED SOLUTIONS OF SINGULAR IVPS WITH ϕ-LAPLACIAN

Abstract: *We study analytical properties of a singular nonlinear ordinary differential equation with a ϕ-Laplacian. We investigate solutions of the initial value problem*

$$(p(t)\phi(u'(t)))' + p(t)f(\phi(u(t))) = 0, \quad u(0) = u_0 \in [L_0, L], \quad u'(0) = 0$$

on the half-line $[0,\infty)$. Here, f is a continuous function with three zeros, function p is positive on $(0,\infty)$ and $p(0) = 0$. The integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s}{p(s)}$ may be divergent which yields the time singularity at $t = 0$. Our equation generalizes equations which appear in hydrodynamics or in the nonlinear field theory.

Keywords: *second order ODE, time singularity, existence and uniqueness, ϕ-Laplacian, damped solution.*

Datum odeslání článku do redakce: 04.2017
Datum přijetí článku redakcí: 05.2017

Mgr. Jakub STRYJA, Ph.D.,
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 324 177, e-mail: jakub.stryja@vsb.cz