PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

ROVNOMĚRNÝ VODOROVNÝ VRH

Martin SWACZYNA[1], *Petr VOLNÝ*[2]
[1] *Ostravská univerzita,* [2] *VŠB – Technická univerzita Ostrava*

1 ÚVOD

Tento příspěvek navazuje na naše předchozí články věnované teoretickému problému rovnoměrných pohybů v homogenním a centrálních gravitačních polích [7,8]. Matematický rámec tohoto problému je detailněji prezentován v [1–6].

Z klasické mechaniky je známo, že pohyby částice lze klasifikovat ze dvou hlavních hledisek. První hledisko souvisí s tvarem trajektorie, rozlišujeme mezi *přímočarými* a *křivočarými* pohyby. Druhým hlediskem je rychlost pohybující se částice, uvažujeme buď pohyby *rovnoměrné* nebo *nerovnoměrné*. V případě rovnoměrných pohybů velikost okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ zůstává konstantní během pohybu, $|\boldsymbol{v}| = v_0 = \text{const}$. V případě nerovnoměrných pohybů se velikost okamžité rychlosti v průběhu pohybu mění, $|\boldsymbol{v}| = v(t)$.

Je zjevné, že klasický vodorovný vrh není ani přímočarý, ani rovnoměrný. Abychom klasický vodorovný vrh modifikovali na rovnoměrný, uvažujeme takový pohyb jako *vázaný* mechanický systém podrobený jisté dodatečné podmínce - *vazbě*, která zaručí požadovaný charakter pohybu.

V článku tedy studujeme modifikaci klasického vodorovného pohybu na rovnoměrný vrh vodorovný. Problém je řešen vzhledem k zadaným počátečním podmínkám jako úloha pro nalezení partikulárního řešení *redukované pohybové rovnice* vázaného mechanického systému, který vznikl podrobením mechanického systému jedné částice v homogenním gravitačním poli jedné neholonomní vazbě. která je nelineární v komponentách rychlosti,

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0, \tag{1}$$

a která reprezentuje požadavek na rovnoměrnost pohybu. Tato vazba se nazývá *izotachytonní* vazba.

Ve článku prezentujeme srovnání obou vodorovných vrhů (klasického a rovnoměrného) vzhledem ke stejným počátečním podmínkám, obě částice startují z počáteční výšky h_0 s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (v_0, 0)$. Odpor vzduchu je zanedbán. Prezentovaný problém může sloužit jako vhodné téma pro seminář z teoretické mechaniky na vysokoškolské úrovni.

2 KLASICKÝ VODOROVNÝ VRH

Uvažujme částici o hmotnosti m pohybující se v homogenním gravitačním poli ($\boldsymbol{g} = (0, -g)$ je gravitační zrychlení). Částice startuje z bodu $[0, h_0]$ s počáteční rychlostí

$\boldsymbol{v}_0 = (v_0, 0)$, tzn. pohyb je orientován v horizontálním směru. Lagrangián uvažovaného mechanického systému je

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \tag{2}$$

Newtonovy pohybové rovnice, respektive Eulerovy-Lagrangeovy rovnice lagrangiánu (2), mají jednoduchý tvar

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg. \tag{3}$$

Vzhledem k počátečním podmínkám $x(0) = 0$, $y(0) = h_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ a $\dot{y}(0) = 0$, dostáváme partikulární řešení pohybových rovnic (3)

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt^2, \tag{4}$$

které reprezentuje parametrické vyjádření klasického vodorovného vrhu. Eliminací časového parametru t, $t = x/v_0$, dostáváme

$$y = h_0 - \tfrac{g}{2v_0^2}x^2, \tag{5}$$

rovnici paraboly. Nicméně, trajektorie je realizována pouze podél části paraboly (5) v rozmezí od startovacího bodu $[0, h_0]$ po dopad $[R, 0]$, kde R označuje vzdálenost bodu dopadu částice od počátku soustavy souřadnic (dopad).

Časová závislost kartézských komponent $\boldsymbol{v}_x = v_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}_y = v_y\boldsymbol{j}$ okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ je dána

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = v_0, \quad v_y(t) = \dot{y}(t) = -gt, \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os x, respektive y. Časová závislost velikosti okamžité rychlosti je pak vyjádřena vztahem

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}. \tag{7}$$

Kartézské komponenty $\boldsymbol{a}_x = a_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{a}_y = a_y\boldsymbol{j}$ okamžitého zrychlení $\boldsymbol{a}$ jsou

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_x(t) = 0, \quad a_y(t) = \ddot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y(t) = -g. \tag{8}$$

Velikost okamžitého zrychlení je tedy

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = g. \tag{9}$$

Vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$ lze také rozložit na tečnou $\boldsymbol{a}_t$ a normálovou $\boldsymbol{a}_n$ složku. Tečná složka je dána

$$\boldsymbol{a}_t = a_t\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}, \qquad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}, \tag{10}$$

kde $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}}$ je jednotkový vektor ve směru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$. Normálová složka zrychlení je

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t, \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}. \tag{11}$$

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

Na druhé straně, pro velikost normálové složky a_n platí

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{r(t)} = v^2(t)\varkappa(t), \tag{12}$$

kde $r(t)$ je poloměr křivosti trajektorie v čase t a $\varkappa(t) = 1/r(t)$ je křivost trajektorie v čase t. Pokud srovnáme vztahy (11) a (12) dostáváme vyjádření pro křivost $\varkappa(t)$ trajektorie klasického vodorovného vrhu,

$$\varkappa(t) = \frac{v_0 g}{\sqrt{(v_0^2 + g^2t^2)^3}}. \tag{13}$$

Týž výsledek lze získat použitím klasického geometrického vyjádření pro křivost $\varkappa$ roviné křivky vzhledem k libovolné parametrizaci

$$\varkappa(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \tag{14}$$

po dosazení a s využitím vztahů(6), (7) a (8).

Kinematické parametry klasického vodorovného vrhu jsou:

- celkový čas $T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$,
- dopad $R = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$,
- dopadová rychlost $v_R = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$,
- úhel dopadu $\cos\alpha = \dfrac{|\boldsymbol{v}_R \cdot \boldsymbol{i}|}{|\boldsymbol{v}_R||\boldsymbol{i}|} = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}$,
  kde $\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v}(T) = (v_0, -\sqrt{2gh_0})$ je vektor dopadové rychlosti,$|\boldsymbol{v}_R| = v_R$, $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ je jednotkový vektor ve směru osy x,
- křivost trajektorie $\varkappa(t) = \dfrac{v_0 g}{\sqrt{(v_0^2 + g^2t^2)^3}}$.

Nakonec určíme délku trajektorie klasického vodorovného vrhu

$$s = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Integrace a vyčíslení vzhledem k mezím 0 a T vede k následujícímu výsledku

$$s = \sqrt{\tfrac{h_0}{2g}}\sqrt{v_0^2 + 2gh_0} + \tfrac{v_0^2}{2g}\ln\left(\frac{\sqrt{2gh_0} + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{v_0}\right). \tag{16}$$

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

3 DYNAMIKA ČÁSTICE V ROVINĚ PODROBENÉ JEDNÉ NEHOLONOMNÍ VAZBĚ

Uvažujme mechanický systém jedné částice v konfiguračním prostoru $\mathbb{R}^2$ (rovině) pospaný *lagrangiánem* $L = T - V$, kde T je *kinetická energie* částice a V je její *potenciální energie*. Označme pomocí q^1, q^2, jisté zobecněné souřadnice v konfiguračním prostoru. Pohyb je pak popsán *Newtonovými pohybovými rovnicemi*

$$\ddot{q}^1 = -\frac{\partial V}{\partial q^1}, \quad \ddot{q}^2 = -\frac{\partial V}{\partial q^2}, \tag{17}$$

které vznikají jako *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice* lagrangiánu L,

$$\frac{\partial L}{\partial q^1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2}\right) = 0. \tag{18}$$

V případě, že pohyb částice je omezen jednou *neholonomní vazbou* závisející na čase t, zobecněných souřadnicích q^1, q^2 a zobecněných komponentách $\dot{q}^1$, $\dot{q}^2$ rychlosti $\boldsymbol{v}$,

$$f(t, q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = 0, \tag{19}$$

která reprezentuje jistou geometrickou plochu (varietu) v příslušném evolučním prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, dynamika pohybu je spojena s přítomností jisté dodatečné vazebné síly

$$\boldsymbol{\Phi} = \mu \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^1}, \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^2}\right), \tag{20}$$

nazývané *Chetaevova vazebná síla*, kde μ je *lagrangeův multiplikátor*. Takové vyjádření vazebné síly se považuje za vhodné a bylo ověřeno na mnoha praktických aplikacích neholonomních systémů.

Pohyb vázané částice je popsán neholonomními Eulerovými-Lagrangeovými rovnicemi

$$\frac{\partial L}{\partial q^1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\right) = \mu\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^1}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2}\right) = \mu\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^2}. \tag{21}$$

Vzhledem k běžně používané neholonomní terminologii se rovnice (21) nazývají *Chetaevovy pohybové rovnice* nebo též *deformované* pohybové rovnice, jelikož vznikají deformací nevázaných Eulerových-Lagrangeových rovnic (18) původního nevázaného mechanického systému prostřednictvím Chetaevovy vazebné síly (20). Korektnost deformovaných rovnic byla ověřena z *neholonomního variačního principu* [5].

4 ROVNOMĚRNÝ VODOROVNÝ VRH

Zatímco v případě klasického vodorovného vrhu se velikost okamžité rychlosti mění (7), pro rovnoměrný vodorovný vrh požadujeme konstantnost velikosti okamžité rychlosti částice, tj.

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = v_0 = \text{const.}, \tag{22}$$

kde v_0 je velikost počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}$. Rovnice (22) představuje jednu neholonomní vazbu, kterou lze přepsat do následujícího tvaru,

$$f \equiv \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) - v_0^2 = 0. \tag{23}$$

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

Tato vazba se nazývá *izotachytonní* vazba a je zjevné, že se jedná o neholonomní vazbu nelineární v komponentách rychlosti $\boldsymbol{v}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pohyb je realizován v polorovině, kde $\dot{x} > 0$. A tedy lze rovnici (23) převést do explicitního vyjádření

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \dot{y}^2}. \tag{24}$$

Chetaevova vazebná síla $\boldsymbol{\Phi}$ (20) vznikající v souvislosti s vazbou (23) je vektor

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_x, \Phi_y) = \mu \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = \mu(2\dot{x}, 2\dot{y}), \tag{25}$$

kde μ lagrangeův multiplikátor. Deformované pohybové rovnice (21) aplikované na náš problém dávají

$$m\ddot{x} = 2\mu\dot{x}, \quad m\ddot{y} = 2\mu\dot{y} - mg, \tag{26}$$

což společně s rovnicí vazby (24) modeluje rovnoměrný vodorovný vrh.

Když eliminujeme lagrangeův multiplikátor μ, dostaneme

$$\mu = -\frac{m\dot{y}\ddot{y}}{2(v_0^2 - \dot{y}^2)}. \tag{27}$$

Po dosazení (27) do druhé rovnice systému (26), a po rutinních manipulacích získáme jednu pohybovou rovnici nazývanou *redukovanou* pohybovou rovnici pro rovnoměrný vodorovný vrh

$$\ddot{y} = -\tfrac{g}{v_0^2}(v_0^2 - \dot{y}^2), \tag{28}$$

která společně s rovnicí vazby (24) a vzhledem k počátečním podmínkám $x(0) = 0$, $y(0) = h_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ a $\dot{y}(0) = 0$ nám umožní najít parametrické rovnice trajektorie uvažovaného pohybu. Jako původní výsledek prezentujeme parametrické rovnice rovnoměrného vodorovného vrhu,

$$x(t) = -\tfrac{\pi v_0^2}{2g} + \tfrac{2v_0^2}{g} \arctan \mathrm{e}^{\frac{g}{v_0}t}, \quad y(t) = h_0 - \tfrac{v_0^2}{g} \ln\cosh(\tfrac{g}{v_0}t). \tag{29}$$

Časová závislost kartézských komponent $\boldsymbol{v}_x$, $\boldsymbol{v}_y$ okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ je dána

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \frac{v_0}{\cosh(\frac{g}{v_0}t)}, \quad v_y(t) = \dot{y}(t) = -v_0 \tanh(\tfrac{g}{v_0}t). \tag{30}$$

Čtenář může snadno ověřit, že velikost okamžité rychlosti zůstává konstantní,

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = v_0 = \text{const}. \tag{31}$$

Kartézské komponenty $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ zrychlení $\boldsymbol{a}$ jsou

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -g\frac{\tanh(\frac{g}{v_0}t)}{\cosh(\frac{g}{v_0}t)}, \quad a_y(t) = \ddot{y}(t) = \frac{-g}{\cosh^2(\frac{g}{v_0}t)}. \tag{32}$$

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

Odtud pro velikost okamžitého zrychlení dostáváme

$$a(t) = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} = \frac{g}{\cosh(\frac{g}{v_0}t)}. \tag{33}$$

Nicméně tečná složka $\boldsymbol{a}_t = a_t \boldsymbol{e_v}$ zrychlení je nulová, $a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$, jelikož $v(t) = v_0$. Proto pro normálovou složku $\boldsymbol{a}_n$ zrychlení získáme

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t, \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a = \frac{g}{\cosh(\frac{g}{v_0}t)}. \tag{34}$$

Na druhé straně, pro velikost normálové komponenty a_n platí

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{r(t)} = v^2(t)\varkappa(t), \tag{35}$$

kde $r(t)$ je poloměr křivosti trajektorie v čase t a $\varkappa(t) = 1/r(t)$ je křivost trajektorie v čase t. Když srovnáme vztahy (34) a (35), obdržíme vyjádření křivosti trajektorie $\varkappa(t)$ rovnoměrného vodorovného vrhu,

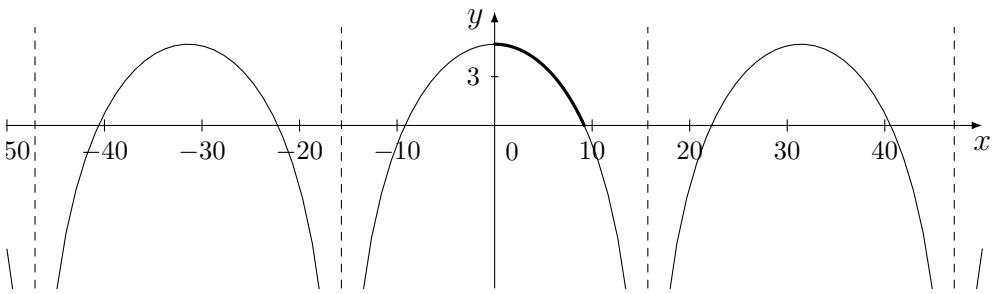
$$\varkappa(t) = \frac{g}{v_0^2 \cosh(\frac{g}{v_0}t)}. \tag{36}$$

Stejný výsledek získáme použitím klasického geometrického vztahu pro křivost (14) užitím vztahů (30) a (32).

Explicitní vyjádření trajektorie (po eliminaci časového parametru t z první rovnice (29)) je dáno vztahem

$$y(x) = h_0 + \tfrac{v_0^2}{g} \ln \left| \cos\left(\tfrac{g}{v_0^2}x\right) \right|. \tag{37}$$

Trajektorie rovnoměrného vodorovného vrhu je realizována pouze po zvýrazněné části grafu funkce (37), viz. Obr. 1.



Obr. 1 Explicitní vyjádření trajektorie

Zdroj: vlastní práce

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

Kinematické parametry rovnoměrného vodorovného vrhu jsou:

- celkový čas $T = \frac{v_0}{g} \operatorname{arccosh} \mathrm{e}^{\frac{gh_0}{v_0^2}}$
- dopad $R = \frac{v_0^2}{g} \arccos \mathrm{e}^{-\frac{gh_0}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{g}\alpha$, kde α je úhel dopadu
- dopadová rychlost $v_R = v_0 = \text{const.}$,
- úhel dopadu $\cos\alpha = \dfrac{|\boldsymbol{v}_R \cdot \boldsymbol{i}|}{|\boldsymbol{v}_R||\boldsymbol{i}|} = \mathrm{e}^{-\frac{gh_0}{v_0^2}} = R\frac{g}{v_0^2}$,
  kde $\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v}(T) = \left(v_0 \mathrm{e}^{-\frac{gh_0}{v_0^2}}, -v_0 \mathrm{e}^{-\frac{gh_0}{v_0^2}} \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{2gh_0}{v_0^2}} - 1}\right)$ je vektor dopadové rychlosti, $|\boldsymbol{v}_R| = v_R = v_0$, $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ je jednotkový vektor ve směru osy x,
- křivost trajektorie $\varkappa(t) = \dfrac{g}{v_0^2 \cosh(\frac{g}{v_0}t)}$.

Na závěr spočítáme délku trajektorie rovnoměrného vodorovného vrhu,

$$s = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t = v_0 \int_0^T \mathrm{d}t = v_0 T = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{arccosh} \mathrm{e}^{\frac{gh_0}{v_0^2}} . \tag{38}$$

5 SROVNÁNÍ KLASICKÉHO A ROVNOMĚRNÉHO VODOROVNÉHO VRHU

Srovnáme kinematické parametry obou pohybů, klasický vodorovný vrh vs. rovnoměrný vodorovný vrh vzhledem ke stejným počátečním podmínkám; $x(0) = 0$, $y(0) = h_0$ s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (v_0, 0)$ pro následující číselné hodnoty $v_0 = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $g = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a $h_0 = 5\,\mathrm{m}$, viz. Tab. 1.

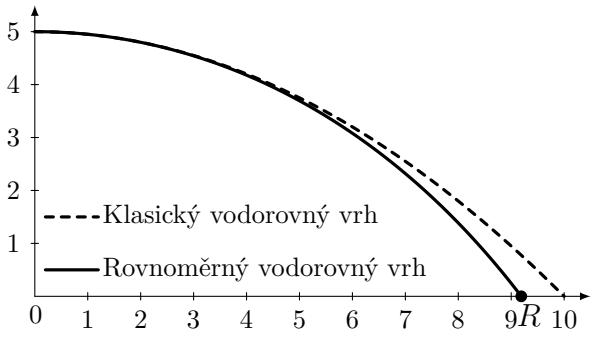
Tab. 1 Kinematické parametry - srovnání

Klasický vodorovný vrh	Rovnoměrný vodorovný vrh
$R = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 10\,\mathrm{m}$	$R = \frac{v_0^2}{g} \arccos \mathrm{e}^{-\frac{gh_0}{v_0^2}} \doteq 9.19\,\mathrm{m}$
$T = \frac{R}{v_0} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 1\,\mathrm{s}$	$T = \frac{v_0}{g} \operatorname{arccosh} \mathrm{e}^{\frac{gh_0}{v_0^2}} \doteq 1.09\,\mathrm{s}$
$v_R = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \doteq 14.14\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$	$v_R = v_0 = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
$\alpha = \arccos \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh_0}} = 45°$	$\alpha = \arccos \mathrm{e}^{-\frac{gh_0}{v_0^2}} \doteq 52° 39' 36''$
$s \overset{(16)}{\doteq} 11.48\,\mathrm{m}$	$s = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{arccosh} \mathrm{e}^{\frac{gh_0}{v_0^2}} \doteq 10.85\,\mathrm{m}$

Zdroj: vlastní práce

Na následujícím obrázku Obr. 2 prezentujeme srovnání obou pohybů za stejných počátečních podmínek.

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"



Obr. 2 Trajektorie obou pohybů

Zdroj: vlastní práce

6 DYNAMIKA ROVNOMĚRNÉHO ŠIKMÉHO VRHU

Klasický vodorovný vrh se děje pod vlivem tíhové síly $\boldsymbol{F}_g = (0, -mg)$, která má konstantní velikost $F_g = mg$ a je orientována svisle dolů. Jelikož částice startuje s počáteční rychlostí ve vodorovném směru, její pohyb se skládá z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru osy x a současně z volného pádu, přičemž pohyb je ukončen dopadem částice na horizontální podložku.

V případě rovnoměrného vodorovného vrhu působí na částici kromě tíhové síly $\boldsymbol{F}_g$ také Chetaevova vazebná síla $\boldsymbol{\Phi}$, která zaručí konstantní velikost rychlosti částice. Připomeňme, že Chetaevova vazebná síla je dána vztahem (25)

$$\boldsymbol{\Phi} = \mu(t)(2\dot{x}, 2\dot{y}) = 2\mu(t)\boldsymbol{v}(t) = 2\mu(t)v_0\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}(t)}, \tag{39}$$

kde $\boldsymbol{v}(t)$ je vektor okamžité rychlosti, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}(t)}$ je jednotkový vektor ve směru $\boldsymbol{v}(t)$. Je zjevné, že během pohybu Chetaevova síla musí měnit svou velikost $|\boldsymbol{\Phi}| = 2v_0|\mu(t)|$, a současně také svůj směr$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}(t)}$, který je určen směrem vektoru $\boldsymbol{v}(t)$. Časová závislost lagrangeova multiplikátoru $\mu(t)$ je

$$\mu(t) = -\frac{m\dot{y}\ddot{y}}{2(v_0^2 - \dot{y}^2)} \overset{(28)}{=} \frac{mg}{2v_0^2}\dot{y} \overset{(30)}{=} -\frac{mg}{2v_0}\tanh\left(\tfrac{g}{v_0}t\right). \tag{40}$$

Časová závislost Chetaevovy síly $\boldsymbol{\Phi}(t)$ je pak

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = 2\mu(t)v_0\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}(t)} = \phi(t)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}(t)} = -mg\tanh\left(\tfrac{g}{v_0}t\right). \tag{41}$$

Poznamenejme, že vliv Chetaevovy vazebné síly může být nahrazen jistou vnější silou$\boldsymbol{F}_e$ působící ve vektorové přímce vektoru $\boldsymbol{v}(t)$ a její velikost je regulována podle vztahu

$$|\boldsymbol{F}_e| = |\boldsymbol{\Phi}(t)| = |\phi(t)| = mg\tanh\left(\tfrac{g}{v_0}t\right). \tag{42}$$

Zdůrazněme, že skalární funkce $\phi(t) < 0$, tzn. má opačný směr než $\boldsymbol{v}(t)$ a vyrovnává tak klasický zrychlovaný pohyb částice.

Chetaevova síla $\boldsymbol{\Phi}$ má významnou roli v energetické bilanci rovnoměrného vodorovného vrhu. Mechanická práce $W_{\boldsymbol{\Phi}}$ Chetaevovy síly$\boldsymbol{\Phi}$ podél trajektorie γ rovnoměrného

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020
EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO
Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

vodorovného vrhu vyrovnává změny potenciální energie, kinetická energie zůstává během pohybu konstantní. Na detaily odkazujeme na [7].

ZÁVĚR

Modifikace klasického vodorovného vrhu na rovnoměrný přináší změny v kinematice, dynamice, a také v energetické bilanci uvažovaného pohybu. Z hlediska kinematiky již trajektorií není část paraboly, ale malá část grafu jisté transcendentní periodické funkce (37), Obr. 1. Jsou zde změny v kinematických parametrech oproti klasickému vodorovnému vrhu za stejných počátečních podmínek h_0, v_0. Dopad R rovnoměrného vodorovného vrhu je kratší, délka s je kratší, a celkový čas T pohybu je nepatrně delší.

Dynamika modifikovaného vodorovného vrhu se vysvětluje přítomností Chetaevovy vazebné síly $\mathbf{\Phi}$, která zaručuje rovnoměrnost pohybu. Je ukázáno, že vazebná síla musí během pohybu měnit jak svou velikost (42), tak také svůj směr $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}(t)}$.

PODĚKOVÁNÍ

Autoři děkují za podporu svým pracovištím.

LITERATURA

1. Ju. I. Neimark, N. A. Fufaev. *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Rhode Island: Translations of Mathematical Monographs 33, American Mathematical Society, 1972.
2. J. Cortés Monforte. *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems*, Berlin: Lecture Notes in Mathematics 1793, Springer, 2002.
3. M. de León, J. C. Marrero, D. M. de Diego. "Mechanical systems with nonlinear constraints", *Int. J. Theor. Phys.*, Vol. 36, 1997, p. 979–995.
4. O. Krupková. "Mechanical systems with nonholonomic constraints", *J. Math. Phys.*, Vol. 38, 1997, p. 5098–5126.
5. O. Krupková. "The nonholonomic variational principle", *J. Phys. A: Math. Theor.* Vol. 42, No. 1, 185201, 2009, p. 1–40.
6. O. Krupková, J. Musilová. "Nonholonomic variational systems", *Rep. Math. Phys*, Vol. 55, No. 2, 2005, p. 211–220.
7. M. Swaczyna, P. Volný. "Uniform projectile motions: dynamics, symmetries and conservation laws", *Rep. Math. Phys.*, Vol. 73, 2014, p. 177–200.
8. M. Swaczyna, P. Volný. "Uniform motions in central fields", *J.* Geom. Mech., Vol. 9, 2017.

PŘEKRAČUJEME HRANICE
PRZEKRACZAMY GRANICE
2014—2020

EVROPSKÁ UNIE / UNIA EUROPEJSKA
EVROPSKÝ FOND PRO REGIONÁLNÍ ROZVOJ
EUROPEJSKI FUNDUSZ ROZWOJU REGIONALNEGO

Projekt jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego oraz z budżetu państwa RP
"Przekraczamy Granice"

ROVNOMĚRNÝ VODOROVNÝ VRH

Abstrakt: *V článku prezentujeme modifikaci klasického vodorovného vrhu v homogenním gravitačním poli na rovnoměrný vodorovný vrh. Částice pohybující se v homogenním gravitačním poli je chápána jako mechanický systém podrobený neholonomní nelineární vazbě, která udržuje konstantní velikost okamžité rychlosti částice během pohybu. Prezentujeme srovnání kinematických parametrů obou pohybů (klasického i rovnoměrného vodorovného vrhu) vzhledem ke stejným počátečním podmínkám. Prezentovaný problém může sloužit jako vhodné téma k elementárnímu kurzu teoretické mechaniky na vysokoškolské úrovni.*

Klíčová slova: *neholonomní mechanický systém, redukované a deformované pohybové rovnice, Chetaevova vazebná síla, vodorovný vrh, kinematické parametry.*

UNIFORM HORIZONTAL PROJECTILE MOTION

Abstract: *In the paper we present the modification of the classical horizontal projectile motion in the homogeneous gravitational field called uniform horizontal projectile motion. The particle passing in the homogeneous gravitational field is treated as a mechanical system subjected to a nonholonomic nonlinear constraint which keeps the magnitude of the instantaneous velocity of the particle constant during the motion. We present the comparison of the kinematic parameters of both motions (classical and uniform horizontal projectile motions) under the same initial conditions. The presented problem can serve as a suitable topic for an elementary course of theoretical mechanics on the university level.*

Keywords: *nonholonomic mechanical systems, reduced and deformed equations of motion, Chetaev constraint force, horizontal projectile motion, kinematic parameters.*

Datum odeslání článku do redakce: 04.2017
Datum přijetí článku redakcí: 05.2017

RNDr. Martin SWACZYNA, Ph.D.,
Ostravská univerzita
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky
30. dubna 22, 701 03, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 092 131, e-mail: martin.swaczyna@osu.cz

RNDr. Petr VOLNÝ, Ph.D.,
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava, Česká republika
tel.: +420 597 324 152, e-mail: petr.volny@vsb.cz